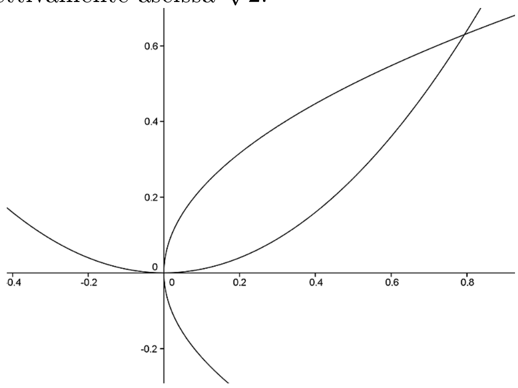
PNI problema 2

a) Le parabole di equazione $y = x^2$ e $y^2 = 2x$ hanno un fuoco rispettivamente in $F_1(0, \frac{1}{4})$ e $F_2(\frac{1}{2}, 0)$. Le loro direttrici hanno rispettivamente per equazione $y = -\frac{1}{4}$ e $x = -\frac{1}{2}$. Il punto A di intersezione dei due grafici ha effettivamente ascissa $\sqrt[3]{2}$.



b) Il problema classico dell'antichità legato alla quantità $\sqrt[3]{2}$ è la *duplicazione del cubo* (con riga e compasso). Usiamo il metodo di bisezione a partire dall'intervallo $1 \leq x \leq 2$ (dato che la funzione $f(x) = x^3 - 2$ assume valori discordi: $f(1) = -1$ e $f(2) = 6$). Si consideri il valore $x = \frac{3}{2}$ come valore approssimato. Si ha $f(3/2) > 0$. Si considera quindi come valore approssimato il valore medio nell'intervallo $[1, 3/2]$, precisamente $x = \frac{5}{4}$. Poiché $f(\frac{5}{4}) < 0$ si prende in considerazione il valore medio dell'intervallo $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$. Precisamente $x = \frac{11}{8}$. Ripetendo il procedimento, si ha $f(\frac{11}{8}) > 0$. Dunque si considera il valore medio di $[\frac{5}{4}, \frac{11}{8}]$, vale a dire $\frac{21}{16}$. Poiché è $f(\frac{21}{16}) > 0$, si prende infine in considerazione il valor medio $x = \frac{41}{32}$ di $[\frac{5}{4}, \frac{21}{16}]$. In seguito si ha $x = \frac{81}{64}$ valor medio $[\frac{41}{32}, \frac{21}{16}]$. Infine troviamo il valor medio $\frac{161}{64}$ nell'intervallo $[\frac{5}{4}, \frac{81}{64}]$. Questo valore dista da $\sqrt[3]{2}$ per meno di $\frac{1}{128}$. Quindi soddisfa le precisioni richieste.

c) Il segmento staccato sui due archi dalle rette parallele all'asse delle x è dato da $d(y) = \sqrt{y} - \frac{1}{2}y^2$ Da qui, essendo $d' = \frac{1-2y\sqrt{y}}{2\sqrt{y}} = 0$, si ricava $y^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$ e quindi $y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

d) Le sezioni ottenute tagliando il solido di rotazione con piani ortogonali all'asse delle x sono corone circolari. Il volume di W è dato da:

$$\pi[\int_0^{\sqrt[3]{2}} 2x dx - \int_0^{\sqrt[3]{2}} x^4 dx] = 3\sqrt[3]{4}\pi/5$$