Ordinamento Questionario

1. La dimostrazione può essere condotta per induzione ma ci si può anche accontentare della seguente osservazione. Per $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ risulta $p' = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$, $p'' = n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots + 2a_2$.

   Si vede così che il polinomio si abbassa di grado (tante volte quante sono le operazioni di derivazione eseguite) e che il coefficiente del termine di grado massimo, a parte a_n, è dato dal prodotto di $n(n-1)$ ... ossia di tanti fattori quante sono le derivate eseguite. Si conclude allora che la derivata n-esima è data da $n!a_n$.

2. I triangoli PAB e PBC sono rettangoli perché PB è perpendicolare al piano contenente ABC. Il triangolo PCA è rettangolo per il teorema delle tre perpendicolari.

3. Dall'equazione $f'(x) = 2$, ovvero $3e^{3x} = 2$, si ricava $x = \frac{(ln2 - ln3)}{3}$

4. Sappiamo che $\sin x/x$ tende a 1 per x tendente a 0. Allora il limite proposto è uguale al limite per x tendente all'infinito di $4x/x = 4$.

5. L'apotema del cono misura 8 dm. Indichiamo con x il raggio della circonferenza di base e con h l'altezza. Si ha $x = \sqrt{64 - h^2}$. Il volume del cono risulta: $V(h) = \frac{1}{3}\pi(64 - h^2)h$. Derivando rispetto ad h: $V'(h) = \frac{1}{3}(-3h^2 + 64)$ La derivata si annulla per $h = \sqrt{\frac{64}{3}}$. $V'(h) > 0$ per $0 < h < \sqrt{\frac{64}{3}}$ quindi $h = \sqrt{\frac{64}{3}}$ è l'altezza che rende massimo il volume del cono.

   Il volume del serbatoio risulta: $V(\sqrt{\frac{64}{3}}) = \frac{128}{9}\pi\sqrt{\frac{64}{3}}$ che è circa $206,37$ dm^3; quindi la sua capacità è circa di $206,37$ litri.

6. La condizione di non negatività su $\cos x$ è soddisfatta per $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (con k arbitrario numero intero).

7. La condizione di continuità $h(4) = \lim_{x \to 4^+} h(x)$ significa $0 = 16k - 9$ ovvero $k = 9/16$

8. La progressione aritmetica è caratterizzata dall'avere costante la differenza tra due termini successivi; nel nostro caso quindi:

   $\binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} = \binom{n}{n-3} - \binom{n}{n-2}$

   Quindi, calcolando e semplificando, si ottiene:

   $\frac{1}{(n-2)!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{6(n-3)!}$. Risulta $n^2 - 9n + 14 = 0$ che ha come soluzioni $n = 2$ e $n = 7$; dovendo essere $n > 3$ il valore di n è 7.

9. Un triangolo come quello richiesto avrebbe altezza relativa al lato BC (che chiamiamo $AH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$) mentre è $\frac{3\sqrt{2}}{2} > 2$. Se l'angolo ABC misura $30°$, l'altezza relativa al lato BC vale $\frac{3}{2}$. In questo caso si hanno i due triangoli ABC e ABC', essendo C' un punto interno al segmento BH, che soddisfano le condizioni date.

10. Ruotando intorno all'asse delle y il tratto di curva data, si ottiene il volume V_1. Tenendo conto che $x = y^2$, calcoliamo $V_1 = \pi \int_0^2 y^4 dy = \frac{32}{5}\pi$. Il volume richiesto è la differenza tra il volume del cilindro di raggio 4 e altezza 2 e V_1: $V = 32\pi - \frac{32}{5}\pi = \frac{128}{5}\pi$.