PNI Questionario

1. La dimostrazione può essere condotta per induzione ma ci si può anche accontentare della seguente osservazione. Per $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ risulta $p' = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$, $p'' = n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots + 2a_2$.

   Si vede così che il polinomio si abbassa di grado (tante volte quante sono le operazioni di derivazione eseguite) e che il coefficiente del termine di grado massimo, a parte a_n, è dato dal prodotto di $n(n-1)$ $\ldots$ ossia di tanti fattori quante sono le derivate eseguite. Si conclude allora che la derivata n-esima è data da $n!a_n$.

2. I triangoli PAB e PBC sono rettangoli perché PB è perpendicolare al piano contenente ABC. Il triangolo PCA è rettangolo per il teorema delle tre perpendicolari.

3. Per calcolare il coefficiente angolare a della retta tangente occorre intersecare le due funzioni e uguagliarne le rispettive derivate prime.
$$\begin{cases} ax = e^x \\ a = e^x \end{cases}$$
   da cui $x = 1$ e $a = e$. Quindi $\tan\alpha = e$ e $\alpha = \arctan e = 69°48'$.

4. La funzione f esiste ed è continua in tutto $\mathbb{R}$ e nel dominio va da meno infinito a più infinito. Inoltre, la sua derivata prima è sempre positiva quindi la funzione è sempre crescente: se ne deduce che lo zero esiste ed è unico. Notiamo che lo zero appartiene all'intervallo $[0, 1]$ perché $f(0) = -1$ e $f(1) = 1$. Applichiamo il metodo della bisezione. $x_1 = \frac{1}{2}$ $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{8} - 1 < 0$. Essendo $f(\frac{1}{2})f(1) < 0$, lo zero della funzione $\bar{x}\epsilon[\frac{1}{2}, 1]$. L'errore commesso è $\varepsilon_1 = 0,5$.

   Consideriamo $x_2 = \frac{3}{4}$. A questo punto $f(\frac{3}{4}) > 0$ implica che $\bar{x}\epsilon[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$. L'errore commesso è $\varepsilon_2 = 0,25$.

   Calcoliamo $x_3 = \frac{5}{8}$. Essendo $f(\frac{5}{8}) = \sqrt[3]{\frac{5}{8}} + \frac{125}{512} - 1 > 0$ lo zero della funzione è $\bar{x}\epsilon[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$. L'errore commesso è $\varepsilon_3 = 0,125$.
   Ancora $x_4 = \frac{9}{16}$.

   A questo punto $f(\frac{9}{16}) = \sqrt[3]{\frac{9}{16}} + \frac{729}{4096} - 1 > 0$ implica che $\bar{x}\epsilon[\frac{1}{2}, \frac{9}{16}]$.

   L'errore commesso è $\varepsilon_4 = 0,0625$. Consideriamo $x_5 = \frac{\frac{1}{2}+\frac{9}{16}}{2} = \frac{17}{32}$.
   $f(\frac{17}{32}) < 0$ questo implica che $\bar{x}\epsilon[\frac{17}{32}, \frac{9}{16}]$. L'errore commesso è $\varepsilon_5 = 0,031$.

   A questo punto $x_6 = \frac{\frac{17}{32}+\frac{9}{16}}{2} = \frac{35}{64}$. $f(\frac{35}{64})$ è > 0 quindi $\bar{x}\epsilon[\frac{17}{32}, \frac{35}{64}]$. L'errore commesso è $\varepsilon_6 = \frac{1}{64}$.
   Infine il punto medio che approssima lo zero della funzione è $x_7 = \frac{69}{128}$. In questo caso l'errore è $\varepsilon_7 = \frac{1}{128}$ che è minore di $\frac{1}{100}$. Lo zero della funzione con la precisione di due cifre decimali è $x = 0,53$.

5. Basta verificare che, cambiando x con $2k - x$, la funzione non cambia. Infatti l'equazione della simmetria rispetto alla retta di equazione $x = k$ è:
$$\begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = y \end{cases}$$

6. L'equazione del luogo geometrico descritto dal punto P di coordinate $(3\cos t, 2\sin t)$ si calcola eliminando il parametro t nelle relazioni
$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$$
   e quindi si ottiene l'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

7. Supponiamo che i due figli della signora Anna siano di sesso femminile o maschile indipendentemente uno dall'altro e con le stesse probabilità. Per ogni figlio, sia p la probabilità di essere femmina. Indichiamo inoltre con X il numero di figli di sesso femminile. Il problema chiede di calcolare $P(X=2|X\geq 1)$.
La probabilità che i figli siano entrambi di sesso femminile è p^2; la probabilità che siano entrambi di sesso maschile è $(1-p)^2$. Dunque: $P(X=0)=(1-p)^2$, $P(X=2)=p^2$, $P(X=1)=1-P(X=0)-P(X=2)=1-p^2-(1-p)^2=2p(1-p)$. Perciò $P(X=2|X\geq 1)=\frac{P(X=2)\cap(X\geq 1)}{P(X\geq 1}=\frac{P(X=2)}{P(x\geq 1)}=\frac{p^2}{2p(1-p)+p^2}=\frac{p}{2-p}$.
In particolare, se assumiamo uguale probabilità per i due sessi, otteniamo $P(X=2|X\geq 1)=\frac{1/2}{3/2}=\frac{1}{3}$

8. La progressione aritmetica è caratterizzata dall'avere costante la differenza tra due termini successivi; nel nostro caso quindi:
$\binom{n}{n-2}-\binom{n}{n-1}=\binom{n}{n-3}-\binom{n}{n-2}$
Quindi, calcolando e semplificando, si ottiene:
$\frac{1}{(n-2)!}=\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{6(n-3)!}$. Risulta $n^2-9n+14=0$ che ha come soluzioni $n=2$ e $n=7$; dovendo essere $n>3$ il valore di n è 7.

9. Un triangolo come quello richiesto avrebbe altezza relativa al lato BC (che chiamiamo AH)uguale a $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ mentre è $\frac{3\sqrt{2}}{2}>2$.
Se invece l'angolo ABC misura 30°, l'altezza relativa al lato BC vale $\frac{3}{2}$. In questo caso si hanno i due triangoli ABC e ABC', essendo C' un punto interno al segmento BH, che soddisfano le condizioni date.

10. Il volume del solido generato dalla rotazione della funzione intorno all'asse delle y si calcola nel seguente modo: $V=\pi\int_0^2(4^2-y^2)dy$. Eseguendo i calcoli si ottiene $V=\frac{128}{5}\pi$. Calcolando l'integrale dato usando la sostituzione $\sqrt{x}=t$ si ottiene esattamente lo stesso valore. Quindi la risposta al quesito è la b.