

## Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

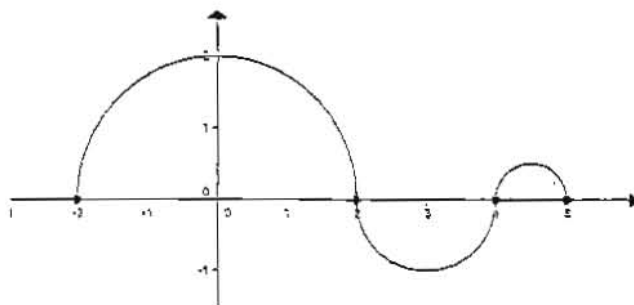
Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

*Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.*

### PROBLEMA 1

Nella figura che segue è riportato il grafico di  $g(x)$  per  $-2 \leq x \leq 5$  essendo  $g$  la derivata di una funzione  $f$ . Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(\frac{9}{2}, 0)$  e raggi rispettivi  $2, 1, \frac{1}{2}$ .



- Si scriva un'espressione analitica di  $g(x)$ . Vi sono punti in cui  $g(x)$  non è derivabile? Se sì, quali sono? E perchè?
- Per quali valori di  $x$ ,  $-2 < x < 5$ , la funzione  $f$  presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.
- Se  $f(x) = \int_{-2}^x g(t) dt$ , si determini  $f(4)$  e  $f(1)$ .
- Si determinino i punti in cui la funzione  $f$  ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di  $f(x)$ ? Qual è l'andamento qualitativo di  $f(x)$ ?

### PROBLEMA 2

Nel piano riferito ad un sistema  $Oxy$  di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni:  $y^2 = 2x$  e  $x^2 = y$ .

- Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con  $A$  il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine  $O$ .
- L'ascissa di  $A$  è  $\sqrt[3]{2}$ ; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di  $10^{-2}$ .
- Sia  $D$  la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi  $O$  e  $A$ . Si determini la retta  $r$ , parallela all'asse  $x$ , che stacca su  $D$  il segmento di lunghezza massima.
- Si consideri il solido  $W$  ottenuto dalla rotazione di  $D$  intorno all'asse  $x$ . Se si taglia  $W$  con piani ortogonali all'asse  $x$ , quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di  $W$ .

## Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

### QUESTIONARIO

1. Sia  $p(x)$  un polinomio di grado  $n$ . Si dimostri che la sua derivata  $n$ -esima è  $p^{(n)}(x) = n! a_n$  dove  $a_n$  è il coefficiente di  $x^n$ .
2. Siano  $ABC$  un triangolo rettangolo in  $A$ ,  $r$  la retta perpendicolare in  $B$  al piano del triangolo e  $P$  un punto di  $r$  distinto da  $B$ . Si dimostri che i tre triangoli  $PAB$ ,  $PBC$ ,  $PCA$  sono triangoli rettangoli.
3. Sia  $r$  la retta d'equazione  $y = ax$  tangente al grafico di  $y = e^x$ . Quale è la misura in gradi e primi sessagesimali dell'angolo che la retta  $r$  forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli con la precisione di due cifre decimali lo zero della funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$ . Come si può essere certi che esiste un unico zero?
5. Sia  $G$  il grafico di una funzione  $x \rightarrow f(x)$  con  $x \in \mathbb{R}$ . Si illustri in che modo è possibile stabilire se  $G$  è simmetrico rispetto alla retta  $x = k$ .
6. Si trovi l'equazione cartesiana del luogo geometrico descritto dal punto  $P$  di coordinate  $(3\cos t, 2\sin t)$  al variare di  $t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
7. Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenti la risposta.
8. Se  $n > 3$  e  $\binom{n}{n-1}$ ,  $\binom{n}{n-2}$ ,  $\binom{n}{n-3}$  sono in progressione aritmetica, qual è il valore di  $n$ ?
9. Si provi che non esiste un triangolo  $ABC$  con  $AB = 3$ ,  $AC = 2$  e  $\hat{A}BC = 45^\circ$ . Si provi altresì che se  $AB = 3$ ,  $AC = 2$  e  $\hat{A}BC = 30^\circ$ , allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.
10. Si consideri la regione  $R$  delimitata da  $y = \sqrt{x}$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 4$ .  
L'integrale  $\int_0^4 2\pi x (\sqrt{x}) dx$  fornisce il volume del solido:
  - a) generato da  $R$  nella rotazione intorno all'asse  $x$ ;
  - b) generato da  $R$  nella rotazione intorno all'asse  $y$ ;
  - c) di base  $R$  le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse  $x$  sono semicerchi di raggio  $\sqrt{x}$ ;
  - d) nessuno di questi.

Si motivi esaurientemente la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.