Questionario PNI

1) Usando il teorema de De l'Hopital, abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\ln 2\cdot 2^{3x}-4\ln 3\cdot 3^{4x}}{2x}=-\infty$$

2) Indichiamo con L la lunghezza del lato dell'esagono e con D il diametro della moneta. La moneta finisce internamente a una mattonella se e solo se il suo centro cade in un punto distante dai lati della mattonella meno di D/2; in altri termini, la moneta finisce internamente ad una mattonella se e solo se il suo centro finisce in un esagono, interno alla mattonella, con lati paralleli a quelli della mattonella e distanti da questi ultimi D/2. Supponendo ovviamente che la moneta venga lanciata "a caso" (ovvero che la probabilità che essa cada in una regione sia proporzionale all'area della regione stessa) la probabilità cercata è data dal rapporto tra l'area dell'esagono interno alla mattonella e l'area della mattonella, ovvero:

$$\frac{\frac{3}{2}(L-D/\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{\frac{3}{2}L^2\sqrt{3}}=\frac{(100-23.25/\sqrt{3})^2}{100^2}=0.7496.$$

3) Il coefficiente angolare della retta tangente è dato da $3^x ln3$. Per $m=1$, è $3^x ln3=1$ da cui

$$3^x=\frac{1}{ln3} \qquad x=log_3\left(\frac{1}{ln3}\right).$$

Cambiando la base: $x=\frac{ln\left(\frac{1}{ln3}\right)}{ln3}\cong -0{,}086$

4) L'insieme N dei numeri naturali e quello Q dei numeri razionali sono equipotenti poiché entrambi costituiti da un'infinità numerabile di elementi.

5) Il numero di segmenti è pari al numero delle combinazioni di n oggetti di classe 2 e quindi è dato da:

$$\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!\,(n-2)!}$$

Analogamente il numero richiesto di triangoli è dato da $\binom{n}{3}$ e quello di tetraedri da $\binom{n}{4}$.

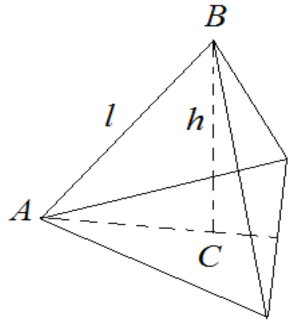
6) Da $y'=3x^2+a$ e $y''=6x$, si deduce che $x=0$ è un punto di flesso per il grafico della funzione. Questo risulta simmetrico rispetto al punto $(0,b)$: infatti, traslando la funzione verso il basso di b, si ottiene una funzione dispari.

7) La misura del segmento *AC* che ha per estremi un vertice *A* del triangolo di base ed il piede della perpendicolare *C* tracciata dal vertice *B* è data da

$$AC=\frac{l\sqrt{3}}{3}$$

quindi

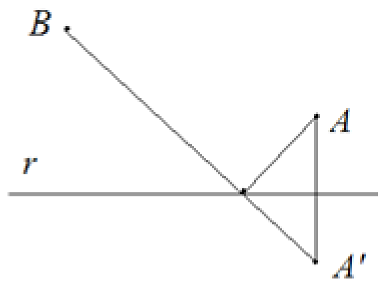
$$\sin\alpha=\frac{AC}{l}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$



8) Indichiamo con A l'evento "il pezzo proviene dallo stabilimento A" e con B e C gli altri eventi analoghi. Sia D l'evento "il pezzo è difettoso". A, B e C costituiscono una partizione dell'evento certo e, sulla base dei dati forniti, si ha Prob(A)=1/2, Prob(B)=1/3 e Prob(C)=1-1/2-1/3=1/6. Inoltre, i dati forniscono le seguenti probabilità condizionate: Prob(D|A)=10/100, Prob(D|B)=7/100 e Prob(D|C=5/100. Per determinare la probabilità cercata si può utilizzare il teorema di Bayes. Quindi, indicata con Prob(A|D) la probabilità che il pezzo sia difettoso nell'ipotesi che provenga dallo stabilimento A, si ha:

$$Prob(A|D) = \frac{\text{Prob}(D|A)Prob(A)}{\text{Prob}(D|A)Prob(A) + \text{Prob}(D|B)Prob(B) + \text{Prob}(D|C)Prob(C)}$$
$$= \frac{1/10 * 1/2}{10/100 * 1/2 + 7/100 * 1/3 + 5/100 * 1/6} = \frac{1/20}{49/600} = \frac{30}{49} = 0.6122.$$

9) La soluzione si ottiene considerando il punto A' simmetrico di A (o il simmetrico B' di B) rispetto alla retta r, quindi congiungendolo con B (o con A). Il punto di intersezione del segmento $A'B$ con r è il punto C tale che il percorso minimo richiesto sia $AC + CB$.
Alternativamente si può risolvere il problema per via analitica, ad esempio scegliendo come asse delle x la retta r e imponendo che il punto A sia il punto unitario sull'asse delle y. Si perviene così ad una funzione di una variabile da minimizzare.



10) Si considerino una sezione del cono circolare retto e della sfera di raggio r inscritta in esso. Si indichi con x la distanza del vertice V dal centro O della circonferenza. I triangoli VKA e VHO sono simili e il rapporto di similitudine è $\frac{VK}{VH} = \frac{x+r}{\sqrt{x^2-r^2}} = \sqrt{\frac{x+r}{x-r}}$. Per le proprietà dei triangoli simili $\frac{VA}{VO} = \frac{KA}{OH} = \sqrt{\frac{x+r}{x-r}}$, da qui si ricava:

$VA = x\sqrt{\frac{x+r}{x-r}}$ $\quad KA = r\sqrt{\frac{x+r}{x-r}}$ e allora la superficie laterale del cono è $S(x) = \frac{2\pi \cdot KA \cdot VA}{2} = \pi \cdot x \cdot \frac{x+r}{x-r}$

Per minimizzare S(x), si pone $S'(x) = 0$: $S'(x) = \frac{\pi(x^2-2rx-r^2)}{(x-r)^2} = 0$ per $x = r \cdot (1 \pm \sqrt{2})$ e si sceglie ovviamente la soluzione positiva. Studiando il segno di $S'(x)$, si vede che la funzione S(x) è decrescente per $r < x < r \cdot (1 + \sqrt{2})$ e crescente per $x > r \cdot (1 + \sqrt{2})$. Pertanto $x = r \cdot (1 + \sqrt{2})$ è il minimo.
La distanza richiesta è quindi $r \cdot \sqrt{2}$.