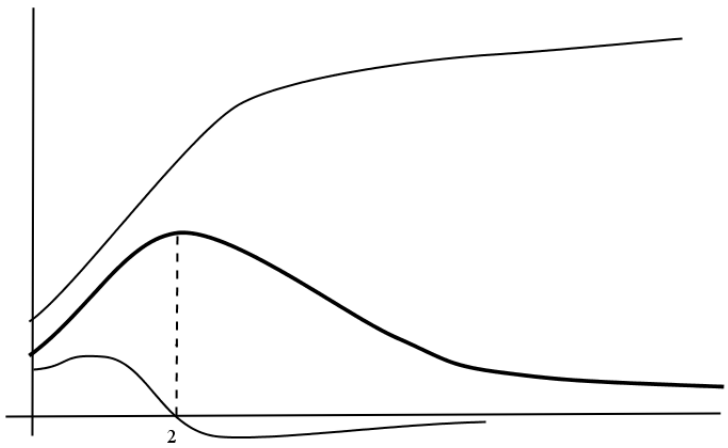
Problema 1 PNI

1. Nelle ipotesi di derivabilità del problema, un punto di massimo x_0 per f' deve annullare la sua derivata prima ($f''(x_0) = 0$) e localmente soddisfare la disuguaglianza $f''(x) \geq 0$ per $x < x_0$ e $f''(x) \leq 0$ per $x > x_0$. L'unico zero di f' è $x_0 = 2$. Dall'informazione relativa alla tangente a Γ, sappiamo che questa ha per equazione $y = f'(2)(x-2) + 4$. Imponendo il passaggio per l'origine, otteniamo $f'(2) = 2$.
   Il punto di massimo di f' ha dunque coordinate $(2, 2)$.
   Un possibile andamento di f' si ha tenendo conto che f' ha un unico punto di massimo e che tende a 0 per $x \to +\infty$ (il grafico di f ha un asintoto orizzontale, per $x \to +\infty$).



2. In un modello di dinamica delle popolazioni, le informazioni sul grafico di f suggeriscono che la popolazione cresce inizialmente a buon ritmo per poi ($x > 2$) rallentare la crescita e tendere ($x \to +\infty$) a uno stato di equilibrio.

3. Sappiamo che Γ passa per il punto $(2, 4)$. Otteniamo allora la condizione: $4 = \dfrac{a}{1+e^{b-2}}$.
   Sappiamo anche che il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di Γ in $x_0 = 2$ vale 2. Abbiamo allora l'uguaglianza $f'(2) = 2$ ovvero $\dfrac{ae^{b-2}}{(1+e^{b-2})^2} = 2$.
   Il sistema
$$\begin{cases} \dfrac{a}{1+e^{b-2}} = 4 \\ \dfrac{ae^{b-2}}{(1+e^{b-2})^2} = 2 \end{cases}$$
   porta alla condizione $\dfrac{e^{b-2}}{1+e^{b-2}} = \dfrac{1}{2}$ ovvero $e^{b-2} = 1$ ovvero $b - 2 = 0$. Abbiamo così $b = 2$ e $a = 8$.

4. L'area richiesta è data da
$$\int_0^2 f''(x)\,dx = [f'(x)]_0^2 = \left[\frac{8e^{2-x}}{(1+e^{2-x})^2}\right]_0^2 = 2 - \frac{8e^2}{(1+e^2)^2}$$