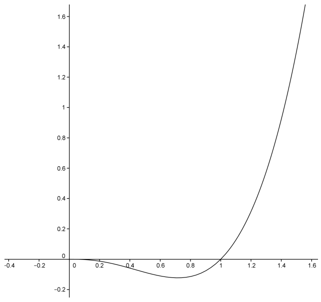
Problema 2 PNI

1. La funzione $f(x) = x^3 \ln x$ è definita per $x > 0$; positiva per $x > 1$, negativa per $x < 1$. Alla frontiera dell'insieme di definizione, abbiamo:

$$\lim_{x\to 0} x^3 \ln x = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} x^3 \ln x = +\infty$$

   Da $f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1) > 0$ per $x > e^{-1/3}$, abbiamo che il punto $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$ è un minimo. Abbiamo anche $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$.
   Da $f'(x) = 6x \ln x + 5x = x(6\ln x + 5) > 0$ per $x > e^{-5/6}$, abbiamo che il punto di flesso è in $\dfrac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$

   Per quanto riguarda le espressioni numeriche arrotondate richieste, abbiamo per la prima $0,717$ e $0,435$ per la seconda.



2. Il punto P ha coordinate $(1, 0)$.
   Della parabola $y = ax^2 + bx + c$, sappiamo:

$$\begin{cases} c = 0 & (\textit{passaggio per l'origine}) \\ a + b = 0 & (\textit{passaggio per } P) \\ 2a + b = 1 & (\textit{uguaglianza delle derivate in } P) \end{cases}$$

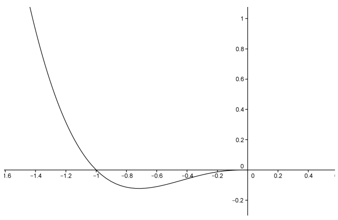
   Otteniamo allora $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$ e l'equazione $y = x^2 - x$.

3. L'area di R è data da $\int_0^1 -x^3 \ln x \, dx$ dove l'integrale non pone problemi in quanto $f(x)$ è funzione limitata per $x \to 0$ e il cambiamento di segno intercorso sulla funzione integranda è dovuto al fatto che essa nell'intervallo $(0, 1)$ è negativa:

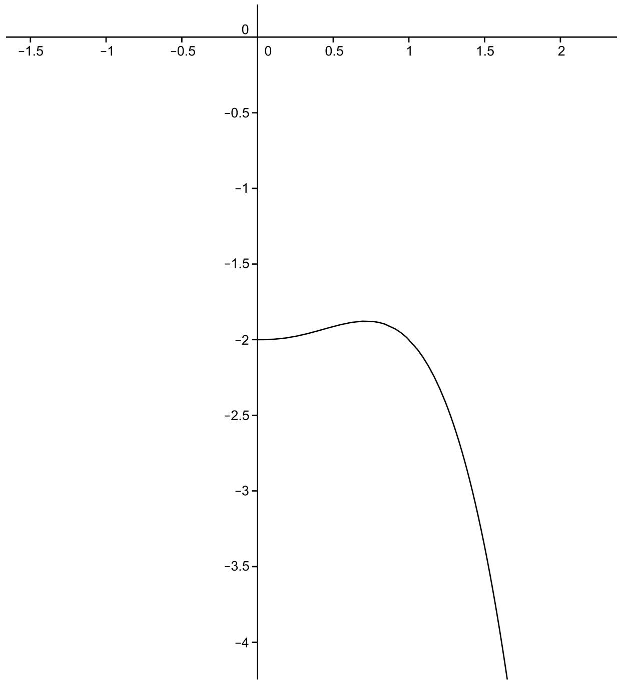
$$\int_0^1 -x^3 \ln x \, dx = -\left[\frac{x^4}{4} \ln x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^3}{4}\, dx = \left[\frac{-x^4}{4} \ln x + \frac{x^4}{16}\right]_0^1 = \frac{1}{16}$$

   La misura di R in mm^2 è data allora da $\dfrac{10\,000}{16}\, mm^2 = 625\, mm^2$.

4. La curva simmetrica di γ rispetto all'asse y ha per equazione $y = -x^3 \ln(-x)$



   La curva simmetrica di γ rispetto alla retta di equazione $y = -1$ ha per equazione $y = -x^3 \ln x - 2$


0
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
−3
−3.5
−4