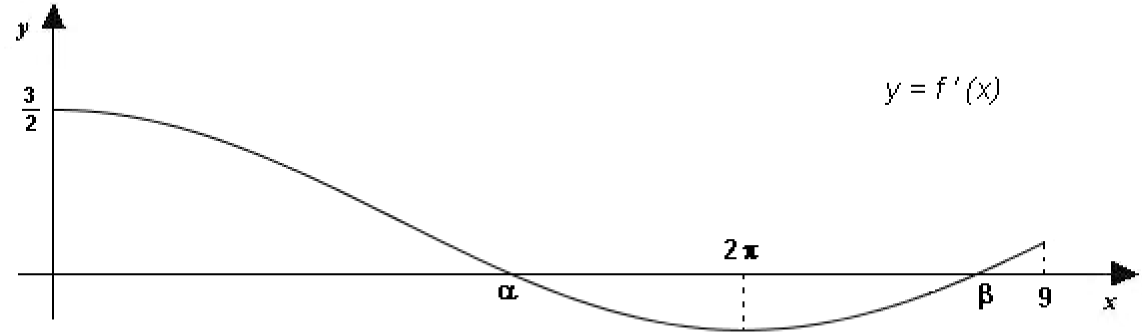
Problema 1 – Ordinamento

1. Dal teorema di Torricelli-Barrow (teorema fondamentale del calcolo integrale) segue:

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \cos\frac{x}{2}$$

Otteniamo allora: $f'(\pi) = \frac{1}{2}$, $f'(2\pi) = -\frac{1}{2}$.

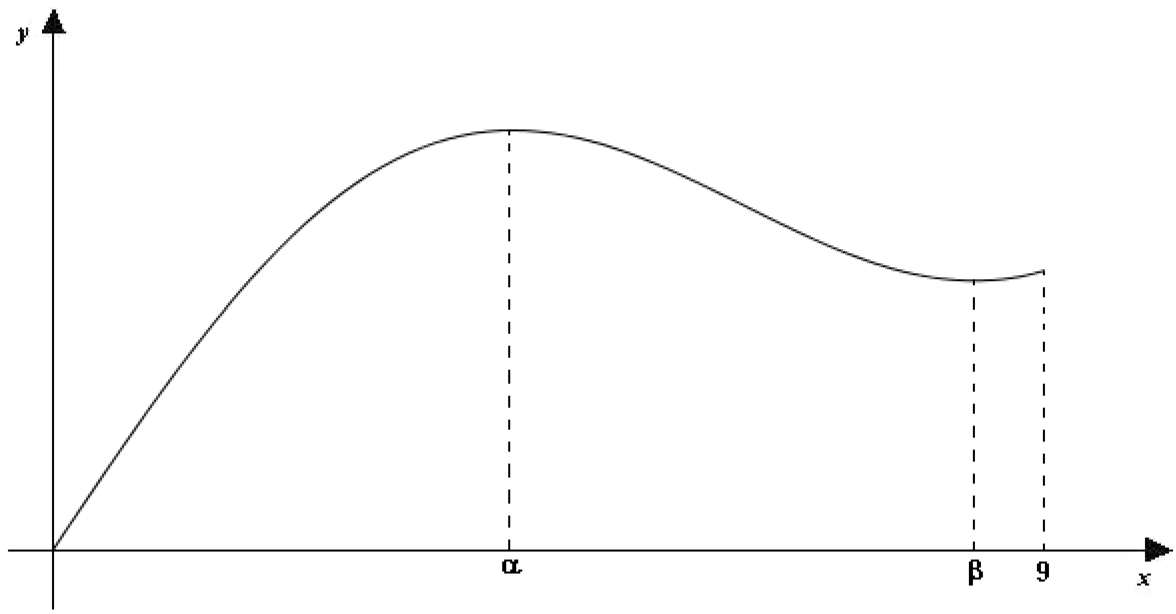
2. Il grafico della funzione f' ha un andamento "tipo coseno", con periodo 4π e traslato verso l'alto di $\frac{1}{2}$:



L'equazione $f'(x) = 0$ è equivalente a: $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$, soddisfatta per $0 \leq x \leq 9$ da $x = \alpha = \frac{4}{3}\pi$ e da $x = \beta = \frac{8}{3}\pi$.

Per dedurre il grafico di f da quello di f', consideriamo dapprima l'intervallo $[0, \alpha]$. In esso, f' è positiva e quindi f è crescente; f' è decrescente, ovvero $f''(x) \leq 0$ e quindi è una funzione concava. Risulta in particolare $f(0) = \int_0^0 \left(\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = 0$.

In modo analogo, si ragiona per gli altri intervalli.



3. Il valor medio di f', relativamente all'intervallo $[0, 2\pi]$, è dato da:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}x+2\sin\frac{x}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}$$

4. Il volume richiesto è dato da:

$$\int_0^4 3\sin\frac{\pi}{4}x\,dx = -\left[\frac{12}{\pi}\cos\frac{\pi}{4}x\right]_0^4 = \frac{12}{\pi}+\frac{12}{\pi} = \frac{24}{\pi}$$