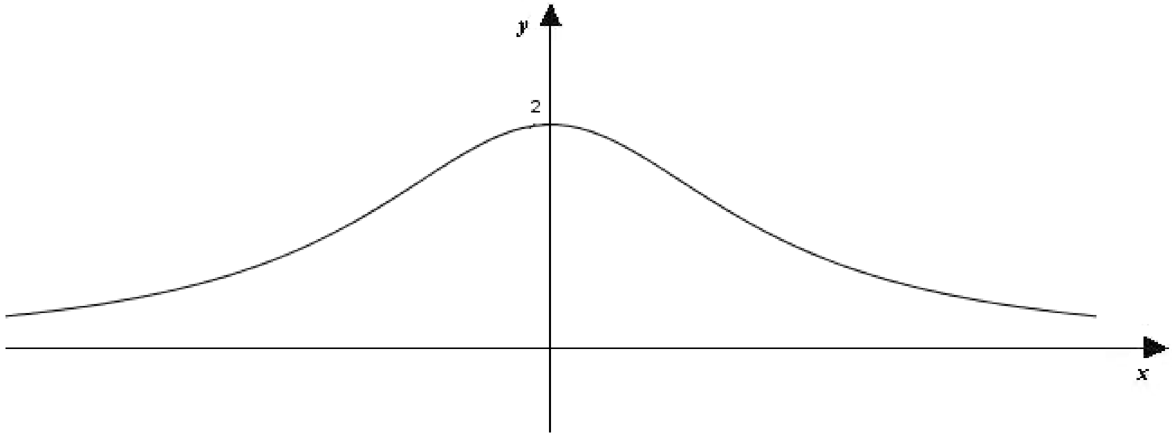
Problema 2 – Ordinamento

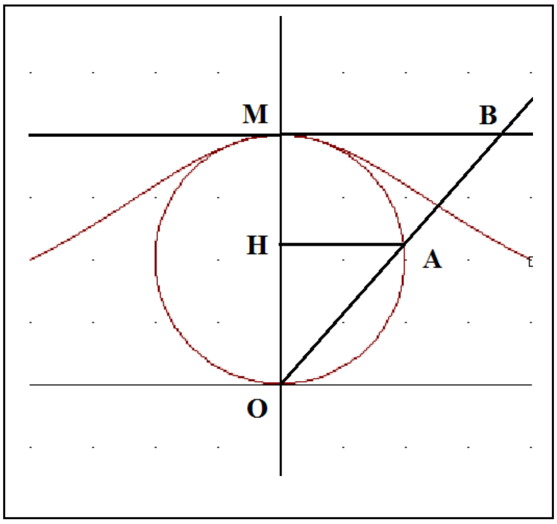
1. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$; positiva e simmetrica rispetto all'asse delle *y*, decrescente con il valore assoluto di *x* perché è crescente il denominatore. Inoltre tende a 0^+ quando *x* tende a ∞: quindi $y=0$ è asintoto orizzontale. Per tali motivi *f* presenta un massimo assoluto in *M* per *x* = 0 e $f(0)=2$; ciò è confermato dal fatto che $y'=-\dfrac{16x}{\left(4+x^2\right)^2}$ che si annulla per *x* = 0. Calcoliamo la derivata seconda allo scopo di individuare i flessi esistenti: $y''=16\dfrac{3x^2-4}{\left(4+x^2\right)^3}$ e i punti di flesso hanno ascissa $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e ordinata $y=\dfrac{32}{19}$.



Le equazioni delle tangenti alla curva Φ per *P* e *Q* sono $y-1=\pm\frac{1}{2}(x\pm 2)$.

Osserviamo che OQ = QM = $\sqrt{5}$ e dalla simmetria si deduce che OQMP è un rombo. L'angolo $M\hat{Q}O$ è il doppio dell'angolo α che la retta OQ forma con l'asse delle *x*, la cui tangente è 1/2; allora $tg\left(M\hat{Q}O\right)=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\dfrac{4}{3}$; quindi $M\hat{Q}O=arctg\dfrac{4}{3}\simeq 0.9273$ misurato in radianti. Dovendo passare ai gradi sessagesimali, $M\hat{Q}O\simeq 0.9273\ \dfrac{180°}{\pi}\ \simeq\ 53°.13$ in gradi e centesimi di grado. Con la proporzione $\dfrac{x}{60'}=\dfrac{13}{100}\Rightarrow x\simeq 8'$ otteniamo la misura dell'angolo nell'unità cercata: $M\hat{Q}O\simeq\ 53°\ 8'$. L'angolo $P\hat{M}Q\simeq 180°-53°\ 8'=126°\ 52'$ essendo il supplementare di $M\hat{Q}O$.

2. Sia α l'angolo che la retta *t* forma con l'asse delle *x*. Da OA= $2\ \sin\alpha$, quindi l'ordinata di A è $2\ \sin^2\alpha$; l'ascissa di OB è $2\ \text{cotg}\alpha$; sostituendo questi valori nella relazione della funzione si ottiene una identità.



3. L'area della regione R si trova mediante l'integrale: $\int_0^2 \frac{8}{4+x^2}\,dx = 4\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$ con la sostituzione $x = 2\,t$. Da qui si ottiene che l'area di R è $4\left[arctg\ t\right]_0^1 = \pi$ che è l'area del cerchio Γ.

Per trovare l'area compresa tra la curva Φ e l'asse delle x, si calcola:

$$2\lim_{h\to+\infty}\int_0^h \frac{8}{4+x^2}\,dx = 8\lim_{h\to+\infty}\int_0^{h/2}\frac{1}{1+t^2}\,dt = 8\lim_{h\to+\infty}\left[arctg\ t\right]_0^{h/2} = 4\pi\ .$$

4. Il volume del solido W si ottiene sommando al cilindro circolare retto la cui base è un cerchio di raggio 2 e la cui altezza è 1, il risultato del seguente integrale : $4\pi\int_1^2 \frac{2-y}{y}\,dy$ il cui argomento è ottenuto esplicitando x^2 in funzione di y.