Questionario – Ordinamento

1. Se h è la misura dell'altezza relativa al lato di misura 3, possiamo sempre scrivere $h = 2\sin\alpha$ (dove α è l'angolo formato dai lati di misura, rispettivamente, 2 e 3). Abbiamo allora l'uguaglianza:

$$\frac{3 \cdot 2\sin(\alpha)}{2} = 3$$

da cui segue $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Il triangolo è rettangolo e il terzo lato (ipotenusa) misura $\sqrt{13}$.

2. La condizione $3 - x \geq 0$ porta a $x \leq 3$.
La condizione $2 - \sqrt{3-x} \geq 0$ porta a $\sqrt{3-x} \leq 2$ ovvero a $3 - x \leq 4$ e quindi $x \geq -1$.
Infine, la condizione $1 - \sqrt{2 - \sqrt{3-x}} \geq 0$ porta a $\sqrt{2-\sqrt{3-x}} \leq 1$ ovvero a $2 - \sqrt{3-x} \leq 1$ e quindi a $\sqrt{3-x} \geq 1$, soddisfatta per $x \leq 2$.
In conclusione, il dominio della funzione è costituito dall'intervallo $[-1, 2]$.

3. La retta passante per B e avente la massima distanza da A è quella perpendicolare alla retta congiungente A con B. Quest'ultima ha coefficiente angolare $m = \frac{7}{8}$. La perpendicolare richiesta ha equazione $y + 8 = -\frac{8}{7}(x+6)$ ovvero $y = -\frac{8}{7}x - \frac{104}{7}$.

4. Siano a e b rispettivamente i lati delle basi minore e maggiore del tronco di piramide e sia H l'altezza della piramide di cui di cui si considera il tronco.
Si ha: $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{b\text{-}a}} \Rightarrow H = \frac{\mathrm{hb}}{\mathrm{b\text{-}a}}$ e anche: $\frac{\mathrm{H\text{-}h}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{b\text{-}a}} \Rightarrow H - h = \frac{\mathrm{ha}}{\mathrm{b\text{-}a}}$.
Il volume del tronco di piramide è dato dalla differenza:

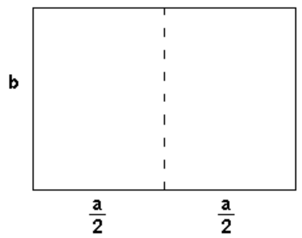
$$\mathrm{V} = \frac{b^2 H}{3} - \frac{a^2(H-h)}{3} \Rightarrow \frac{h}{3}\frac{\left(b^3 - a^3\right)}{b\text{-}a} = \frac{h}{3}\left(b^2 + ab + a^2\right)$$

5. Sì, la valutazione è corretta. Infatti se le dimensioni della valigia sono a,b,c e ciascuna dimensione viene aumentate della percentuale p, il volume della valigia passa da abc, a $(a+pa)(b+pb)(c+pc) = abc\,(1+p)^3$.
Per p = 1/10 $(1+p)^3 = 1{,}331$ e l'aumento è di circa il 33%; per p = 2/10 $(1+p)^3 = 1{,}728$ e l'aumento è di circa il 73%; per p = 25/100 $(1+p)^3 = 1{,}953$ e si ha quasi un raddoppio del volume.

6. La prima permutazione (in ordine crescente) è 1234567.
Permutando le ultime due cifre abbiamo un altro allineamento; permutando le ultime tre cifre abbiamo altri $2 \cdot 2! = 4$ allineamenti; permutando le ultime quattro cifre, abbiamo $3 \cdot 3! = 18$ allineamenti; permutando le ultime cinque cifre, abbiamo $4 \cdot 4! = 96$

allineamenti; permutando le ultime sei cifre, abbiamo $5 \cdot 5! = 600$ allineamenti. In tutto, fino a questo punto, abbiamo ricavato 720 allineamenti.
Ne segue che il 721.esimo è il primo allineamente che “tocca” anche la prima cifra; è dunque 2134567.
Il settimo allineamento è invece dato da 1235467.

7. La similitudine dei rettangoli porta a scrivere la proporzione:



$$a : b = b : \frac{a}{2}$$

da cui deriviamo $b^2 = \frac{a^2}{2}$. Essendo $ab = 1$, ricaviamo $b^2 = \frac{1}{2b^2}$ ovvero $b^4 = \frac{1}{2}$ e quindi $b = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ e $a = \sqrt[4]{2}$.

8. Dal teorema di Torricelli-Barrow (teorema fondamentale del calcolo integrale), abbiamo $g'(x) = f(x)$.
I minimi di g sono da cercarsi anzitutto tra gli zeri di f interni al dominio ma $x = 2$ non è un minimo in quanto, alla sua sinistra, f (cioè g') è positiva.
Anche il punto $x = 0$ è da scartare perché non è positivo. Rimane $x = 4$ che è effettivamente il minimo in quanto alla sua sinistra, localmente, f (cioè g') è negativa e quindi g è crescente.

9. $\lim_{x\to 0} 4\,\frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} 4 \sin x \,\frac{(\cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x\to 0} (-2 \sin x) = 0$

10. La risposta è A) infatti: nell’intervallo $[-4, -2]$, la funzione f è crescente e quindi f' non può essere negativa. Questo esclude i casi B) e D).
Nell’intervallo $[-2, 0]$, la funzione f è decrescente e quindi f' non può essere positiva. Viene escluso anche il caso C).