

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

La funzione f è definita da $f(x) = \int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \right] dt$ per tutti i numeri reali x appartenenti all'intervallo chiuso $[0, 9]$.

1. Si calcolino $f'(\pi)$ e $f'(2\pi)$ ove f' indica la derivata di f .
2. Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico Σ di $f'(x)$ e da esso si deduca per quale o quali valori di x , $f(x)$ presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f'(x)$.
3. Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo $[0, 2\pi]$.
4. Sia R la regione del piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0 \leq x \leq 4$; R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x hanno, per ciascun x , area $A(x) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.
Si calcoli il volume di W .

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita, per tutti gli x reali, da $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$

1. Si studi f e se ne disegni il grafico Φ in un sistema di coordinate cartesiane Oxy . Si scrivano le equazioni delle tangenti a Φ nei punti $P(-2;1)$ e $Q(2;1)$ e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette OP e OQ . Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure, in gradi e primi sessagesimali, dei suoi angoli.
2. Sia Γ la circonferenza di raggio 1 e centro $(0;1)$. Una retta t , per l'origine degli assi, taglia Γ oltre che in O in un punto A e taglia la retta d'equazione $y = 2$ in un punto B . Si provi che, qualunque sia t , l'ascissa x di B e l'ordinata y di A sono le coordinate $(x; y)$ di un punto di Φ .
3. Si consideri la regione R compresa tra Φ e l'asse x sull'intervallo $[0, 2]$. Si provi che R è equivalente al cerchio delimitato da Γ e si provi altresì che la regione compresa tra Φ e tutto l'asse x è equivalente a quattro volte il cerchio.
4. La regione R , ruotando attorno all'asse y , genera il solido W . Si scriva, spiegandone il perché, ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di W .

QUESTIONARIO

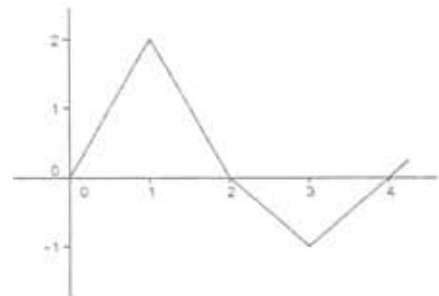
- Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.
- Si calcoli il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$$

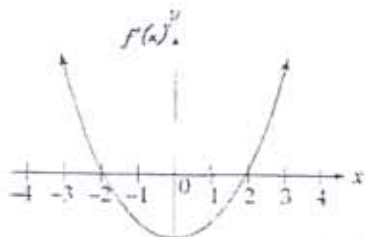
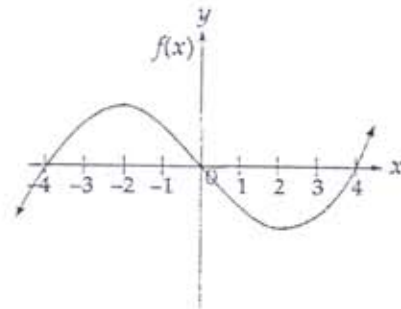
- Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2; -1)$ e $B(-6; -8)$. Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A .
- Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a , b e h , illustrando il ragionamento seguito.
- In un libro si legge: "Due valigie della stessa forma sembrano "quasi uguali", quanto a capacità, quando differiscono di poco le dimensioni lineari: non sembra che in genere le persone si rendano ben conto che ad un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10% (oppure del 20% o del 25%) corrispondono aumenti di capacità (volume) di circa 33% (oppure 75% o 100% : raddoppio)". È così? Si motivi esaurientemente la risposta.
- Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7! = 5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 721-esima posizione?
- Un foglio rettangolare, di dimensioni a e b , ha area 1 m^2 e forma tale che, tagliandolo a metà (parallelamente al lato minore) si ottengono due rettangoli simili a quello di partenza. Quali sono le misure di a e b ?

- La funzione f ha il grafico in figura. Se $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, per quale valore positivo di x , g ha un minimo? Si illustri il ragionamento seguito.
- Si calcoli:

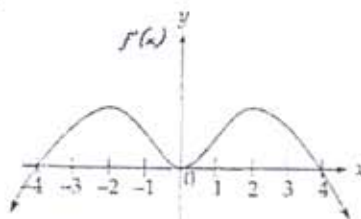
$$\lim_{x \rightarrow 0} 4 \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^2}$$



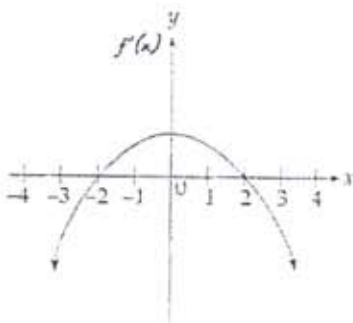
10. Se la figura a lato rappresenta il grafico di $f(x)$, quale dei seguenti potrebbe essere il grafico di $f'(x)$? Si giustifichi la risposta.



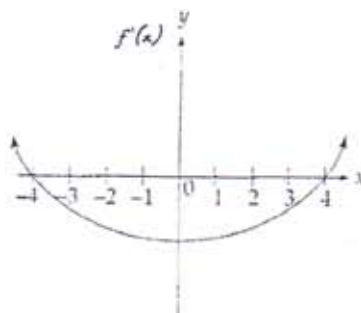
A)



C)



B)



D)

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.