

Maestro di controesempi

Una controversa paternità

Dalla primavera del 1882, quando era stato da poco nominato assistente ed “aiuto nell’insegnamento” di Angelo Genocchi, il professore di Calcolo infinitesimale all’Università di Torino, Giuseppe Peano cominciò a rivolgere i propri interessi verso questioni di Analisi. Ben presto, per ragioni di salute, Genocchi fu costretto a farsi sostituire dal suo giovane “aiuto” che, nell’anno accademico 1883-84, tenne il corso di Calcolo dalla prima lezione fin verso metà marzo. Nel giugno seguente, Peano scriveva a Genocchi che il libraio Bocca gli aveva manifestato “*gran desiderio di pubblicare in queste vacanze parte d’un trattato di calcolo, o scritto da Lei, o fatto secondo i suoi metodi*”. Onde concretare la proposta, “*qualora Ella non creda di pubblicare il trattato*” Peano chiedeva “*se sarebbe possibile che lo scrivessi io stesso, dietro i suoi insegnamenti*” e, in questa ipotesi, “*se non le riuscirebbe sgradito ch’io pubblichi senz’altro il trattato, dicendolo compilato sulle sue lezioni, o almeno, ch’io citi il suo nome nella prefazione*”.

In realtà, il trattato *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale*, che raccoglieva le lezioni di Calcolo differenziale e integrale di Genocchi, fu pubblicato nel 1884 sotto il nome di Genocchi, e corredato di “aggiunte dal Dr. Peano”. Il cosiddetto *Genocchi-Peano*, divenuto celebre.

Il volume era frutto di una profonda rielaborazione. Il “*dover dare alle lezioni la forma di trattato*”, unitamente alla “*necessità di comprendervi quelle ricerche che non sogliono fare nelle lezioni orali, ma sono indispensabili in un libro*” – scriveva Peano – lo avevano convinto della necessità di modificazioni ed aggiunte che egli non esitava a definire “*importanti*”, un aggettivo che ai nostri occhi appare del tutto giustificato, ma che era destinato ad urtare la sensibilità del vecchio professore.

In una puntigliosa dichiarazione, apparsa quello stesso anno negli *Annali di matematica*, Genocchi teneva a precisare che, nonostante il suo nome fosse stato messo “*in capo al frontespizio*”, “*poiché non mi si attribuisca ciò che non è mio, debbo dichiarare che non ho avuto alcuna parte nella compilazione*” del volume. E aggiungeva che “*tutto è dovuto a quel giovane egregio che è il dottor Giuseppe Peano*”. Meno contenuti che in questa dichiarazione ufficiale, ma più indicativi del reale stato d’animo di Genocchi, sono i toni che usa nella corrispondenza privata con colleghi italiani e stranieri, anche se sembra che assai presto si convincesse che il suo giovane assistente non gli “aveva mancato di riguardo”.

Qualche anno dopo, Peano ritornava pubblicamente sulla questione. “*Benché io abbia fatto largo uso delle lezioni del chiar.mo professore* – egli scriveva nell’introduzione al volume *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (1887) – *mi assumo l’intera responsabilità di quanto sta scritto in quel libro, come se sul frontespizio del medesimo non comparisse altro nome che il mio*”.

Infine, ricordando la figura di Genocchi da poco scomparso, nel 1889 Peano aggiungeva qualche ulteriore dettaglio sulla vicenda. Per la stesura del trattato si era servito di “*sunti fatti da allievi alle sue lezioni*”, che aveva poi confrontato “*punto per punto con tutti i principali trattati di calcolo, e con memorie originali, tenendo conto del lavoro di molti*”. Quanto all’esistenza di un manoscritto originale delle lezioni, egli ne aveva avuto notizia dallo stesso Genocchi ma aggiungeva di non aver mai avuto “*occasione di vedere i suoi manoscritti*”.

Genocchi è stato un matematico acuto, che ha lasciato notevoli contributi soprattutto in Teoria dei numeri. È solo per ironia della sorte che il suo nome sia oggi ricordato essenzialmente per il *Genocchi-Peano*, un trattato che Pringsheim nell’*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* annoverava tra i più importanti mai scritti, del quale tuttavia Genocchi stesso volle disconoscere la paternità.

“Il lampioncino alla veneziana”

Peano aveva rivelato la propria maestria nello scovare contro esempi fin dalla primavera del 1882, quando aveva cominciato a sostituire Genocchi a lezione. L’argomento di una delle sue prime

lezioni era l'area di una superficie curva. L'opinione comunemente accettata, che l'area di una superficie si potesse definire in analogia con la definizione di lunghezza di una curva, aveva trovato espressione nel II volume del *Cours de calcul différentiel et intégral* (1879-80) di Serret: “Sia una porzione di superficie curva limitata da un contorno C . Chiameremo area di questa superficie il limite S verso il quale tende l'area di una superficie poliedrale iscritta formata da facce triangolari e limitata da un contorno poligonale avente per limite il contorno C . Occorre dimostrare che il limite esiste ed indipendente dalla legge secondo la quale decrescono le facce della superficie poligonale iscritta”.

Il controesempio trovato da Peano consiste nella superficie laterale del cilindro:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Supponiamo di dividere la superficie in m parti uguali, con $m + 1$ circonferenze, e su ciascuna di esse prendiamo gli n punti di coordinate:

$$\left(\cos \frac{2i\pi}{n}, \sin \frac{2i\pi}{n}, \frac{k}{m} \right) \text{ per } k \text{ pari}$$

$$\left(\cos \frac{(2i+1)\pi}{n}, \sin \frac{(2i+1)\pi}{n}, \frac{k}{m} \right) \text{ per } k \text{ dispari}$$

$$\text{con } i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ e } k = 0, 1, \dots, m.$$

Se si congiungono i punti, si ottengono $2mn$ triangoli isosceli uguali che formano la superficie poliedrica che Peano chiamò il *lampioncino alla veneziana*. La sua area è data da:

$$2mn \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{1}{2m^2} + \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}.$$

Contrariamente a quanto affermava Serret, il limite dipende dal modo in cui m e n tendono all'infinito. Se $m = n$, il limite è 2π , scegliendo invece opportunamente m ed n si può far tendere l'espressione dell'area verso qualunque valore maggiore di 2π .

All'insaputa di Peano, nel dicembre 1880, lo stesso contro esempio di “un poliedro iscritto nella superficie di un cilindro retto, di modo che la superficie di questo poliedro può diventare infinitamente grande”, era stato trovato da Schwarz (e comunicato a Genocchi e a Hermite) che aveva poi ritardato la stesura dell'articolo promesso a Genocchi per l'*Accademia delle Scienze* di Torino. Non è difficile immaginare la reazione di Peano quando presentò il proprio risultato a Genocchi e, da questi, venne a sapere di esser stato da tempo preceduto. Peano si limitò a inserire il contro esempio nelle sue lezioni litografate del corso e lo stesso fece Hermite (con grande disappunto di Schwarz, che pur si vedeva attribuito da Hermite il merito della scoperta).

Se il controesempio denunciava l'inconsistenza della definizione di Serret, lasciava tuttavia aperto il problema di una definizione rigorosa. Prima Hermite e poi Peano ne proposero una che abbandonava il metodo delle superfici poliedrali iscritte (seguito da Serret) e si fondava invece sulla suddivisione della superficie in parti mediante curve chiuse. Nelle *Applicazioni geometriche*, Peano considerava una data superficie qualunque, che scomponeva in parti e proiettava ortogonalmente su un piano. La somma delle aree delle proiezioni è un'area piana, che dipende dal modo di suddivisione della superficie e dal modo in cui si dispongono le parti. “Il limite superiore dei valori di quest'area – concludeva Peano – si dirà l'area della superficie data”.

Continuità e derivabilità

Ancora in argomenti trattati a lezione in sostituzione di Genocchi, Peano aveva trovato occasione per saggiare il suo spirito critico. “Cercando di rendere rigorosa la dimostrazione che le accennai a

proposito della continuità della derivata – scriveva a Genocchi il 7 ottobre 1882 – *sono arrivato ai seguenti risultati che mi prendo la libertà di esporle*”. Il primo risultato si può enunciare dicendo che la derivata $f'(x)$ di una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo se $f(x)$ è derivabile uniformemente. (L’uniforme derivabilità di f è condizione non solo sufficiente ma anche necessaria per la continuità della derivata, come lo stesso Peano osserverà esplicitamente nel trattato del 1884). Il secondo risultato stabiliva che, se $f(x)$ “*ammette derivata in tutto l’intervallo, e se col tendere di x ad a , $f'(x)$ tende verso un limite, questo limite vale $f'(a)$* ”. In altre parole $f'(x)$ è continua nel punto a . Da qui discendeva il terzo risultato: se $f'(x)$ è discontinua in a , allora, quando x tende ad a , $f'(x)$ non tende ad alcun limite. Peano ne dava un esempio tratto, come riconosceva egli stesso, dai *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali* (1878) di Dini. La funzione:

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$$f(0) = 0$$

è continua e derivabile dappertutto, $f'(0) = 0$ mentre per $x \neq 0$ la sua derivata è:

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

che per $x \rightarrow 0$ non tende ad alcun limite determinato.

Il rapporto tra continuità e derivabilità era anche argomento di un polemico scambio di lettere, apparse nei *Nouvelles Annales de mathématiques* nel 1884, che Peano ebbe con Louis-Philippe Gilbert, un matematico di origine francese professore di Analisi all’Università di Louvain. La polemica fu innescata da una lettera di Peano ai *Nouvelles Annales* nella quale il matematico torinese segnalava una “*dimostrazione poco rigorosa*” data da Jordan nel suo *Cours d’analyse* (1882) recentemente pubblicato. Il teorema in questione era il seguente: sia $f(x)$ una funzione la cui derivata è finita e determinata per x appartenente a un dato intervallo. Se a e $a + h$ sono due valori di x nell’intervallo, allora:

$$f(a + h) - f(a) = \mu h$$

con μ compreso tra il massimo e il minimo di $f'(x)$ in $[a, a + h]$.

Nella dimostrazione, Jordan considerava una successione di valori a_1, a_2, \dots, a_n compresi tra a e $a + h$ e poneva:

$$\frac{f(a_r) - f(a_{r-1})}{a_r - a_{r-1}} = f'(a_{r-1}) + \varepsilon_r$$

Al crescere indefinitamente degli a_r – affermava Jordan – le quantità ε_r tendono a zero poiché ε_r è la differenza fra:

$$\frac{f(a_r) - f(a_{r-1})}{a_r - a_{r-1}}$$

e il suo limite:

$$f'(a_{r-1}).$$

Era questa l'inesattezza segnalata da Peano. L'affermazione è vera, infatti, solo a condizione di supporre la continuità della derivata. Peano accompagnava la sua precisazione con lo stesso esempio preso dai *Fondamenti* di Dini che abbiamo visto citato nella sua lettera a Genocchi. A difesa di Jordan, interveniva Gilbert con una lettera alla rivista che conteneva una serie di osservazioni che – come affermava Peano, nella sua pronta risposta - “*non aggiungono nulla al rigore della dimostrazione del sig. Jordan*”.

Quanto all'affermazione di Peano che si sarebbe potuta dimostrare la formula:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \varepsilon h)$$

senza supporre la continuità della derivata, Gilbert si faceva portavoce di Jordan che “*domanda, non senza malizia, di vedere questa dimostrazione, che è impossibile perché il teorema è inesatto*”. Da parte sua, Gilbert riteneva di poter esibire come controesempio la funzione:

$$f(x) = \sqrt{2px} \quad \text{per } 0 \leq x \leq a$$

$$f(x) = \sqrt{2p(2a - x)} \quad \text{per } a \leq x \leq 2a$$

che è continua su tutto l'intervallo “*ma la sua derivata cessa di esserlo per $x = a$, dove passa dal valore:*

$$\sqrt{p/2a}$$

al valore:

$$-\sqrt{p/2a}”.$$

“*L'esempio citato dal sig. Gilbert non soddisfa alle condizioni del teorema*”, era la secca risposta di Peano. Infatti, per $x = a$ la funzione proposta ha derivata destra e derivata sinistra, ma “*non ha una derivata ordinaria determinata*”. Peano forniva inoltre la dimostrazione del teorema del valor medio richiestagli “*non senza malizia*” da Jordan. È la stessa dimostrazione che Peano presenta anche nel trattato del 1884. Da allora è diventata familiare ad ogni studente di Matematica, spesso sotto il nome di *teorema di Lagrange* o *teorema dell'incremento finito*. Infine, aggiungeva Peano in risposta a Jordan, se:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

tende uniformemente a $f'(x)$ allora quest'ultima è continua e viceversa.

Le “Annotazioni”

Se il trattato che Peano pubblica nel 1884 costituisce uno degli esempi paradigmatici del rigore introdotto in Analisi alla fine dell'Ottocento, le *Annotazioni* che vi sono premesse evidenziano alcune caratteristiche peculiari dello stile di Peano. La sua precisione nei contenuti matematici si accompagna ad una rara capacità di mettere in luce con controesempi i difetti (se non i veri e propri errori) presenti in molti dei trattati allora più diffusi e ad una altrettanto rara attenzione per gli aspetti storici.

Ad esempio, nel *Cours d'analyse*, Cauchy definisce quella che oggi si chiama continuità *separata* di $f(x, y, z, \dots)$ rispetto alle singole variabili x, y, z, \dots nell'intorno dei valori X, Y, Z, \dots . Aggiunge che “*si proverà facilmente*” che, nell'intorno di quei valori, se a, b, g, \dots sono delle quantità infinitesime, sarà infinitesima anche la differenza:

$$f(x + \alpha, y + \beta, z + \gamma, \dots) - f(x, y, z, \dots).$$

Peano prova allora l'inesattezza di questa proposizione con il controesempio (già noto, a sua insaputa, a Schwarz e Thomae) dato dal comportamento nell'origine della funzione:

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

che, al tendere di x, y a 0, non tende ad alcun limite ma nell'intorno dell'origine "*assume tutti i valori compresi tra -1 e 1* ". In particolare, la funzione $f(x, y)$ è funzione continua separatamente rispetto a x e rispetto a y ma non rispetto a " *x e y considerate insieme*".