PROBLEMA 2

1.

Poiché a^2 e t^2 devono essere grandezze omogenee, a deve essere misurato in secondi.

[a] = s

Per determinare l'unità di misura di k procediamo all'analisi dimensionale:

T= [k]$\cdot \frac{m}{s^2}$ da cui [k]= T$\cdot \frac{s^2}{m}$

Ricordando che: [F] = [i] [l] [B]

T= [B] = $\frac{[F]}{[i]\,[l]} = \frac{N}{A \cdot m} = \frac{Kg}{A \cdot s^2}$

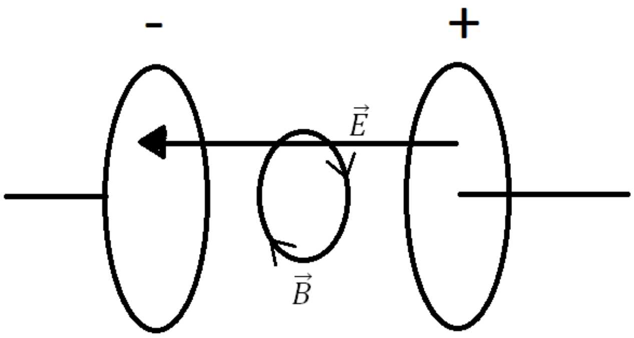
Sostituendo otteniamo

[k] = $\frac{Kg}{A \cdot m}$

All'interno del condensatore è presente un campo magnetico indotto tale da rispettare la IV equazione di Maxwell:

$$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \left(i_c + \varepsilon_0 \cdot \frac{d\Phi(\vec{t})}{dt} \right)$$

Dalla quale si evince che le linee del campo magnetico sono delle circonferenze perpendicolari a $\vec{E}$ con verso che segue la regola della mano destra per $\vec{E}$ crescente.



2.

$$\Gamma(\vec{B}) = \sum_C \vec{B} \cdot \vec{l_i}$$

Poiché C è una circonferenza e lungo C B è costante e il coseno dell'angolo compreso tra B ed l è sempre 1 posso scrivere

$$\Gamma(\vec{B}) = \sum_c \left(\frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} r \right) l_i = \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} r \sum_c l_i =$$

$$= \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} r \cdot 2\pi r = \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} \cdot 2\pi r^2$$

Sempre dalla quarta equazione di Maxwell:

$$\frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} r \cdot 2\pi r = \mu_0 i_c + \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

($\mu_0 i_c = 0$ perché non ci sono correnti concatenate in C).

$$\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \cdot \frac{2\pi r^2 kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$$

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi_1} d\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \cdot \int_0^t \frac{2\pi r^2 kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} dt$$

Poiché $V_0 = 0$ e $V = Ed$ segue: $E_0 = 0$ e quindi: $\Phi_0 = 0$.
Per cui possiamo scrivere:

$$\Phi_1 = \Phi(\vec{E})$$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{k\pi r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \int_0^t \frac{2t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} dt = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a} \right)$$

Calcoliamo la differenza di potenziale:

$$\Delta V = Ed = \frac{\Phi(E)}{S} d = \frac{2kd}{\mu_0 \varepsilon_0} \left(-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a} \right)$$

Il valore a cui tende $|\vec{B}|$ è:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} r = 0$$

Trattandosi di un campo magnetico indotto, esso dipende dalla variazione del campo elettrico. Se, dopo un certo transiente iniziale il campo elettrico tende a un valore costante, allora ci si aspetta che il campo magnetico indotto tenda a 0.

3.
Verifichiamo che $F'(t) = f(t)$.
In particolare $F(0) = 0$ quindi il grafico di F passa per l'origine.
D=**R**
F è pari quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y.

Calcoliamo i limiti

$$\lim_{t \to \pm\infty} F(t) = -\frac{1}{a}$$

quindi $y = -\frac{1}{a}$ è un asintoto orizzontale.

Dallo studio della derivata prima, $f(t)$, si trova che $t = 0$ è l'unico punto di massimo assoluto.

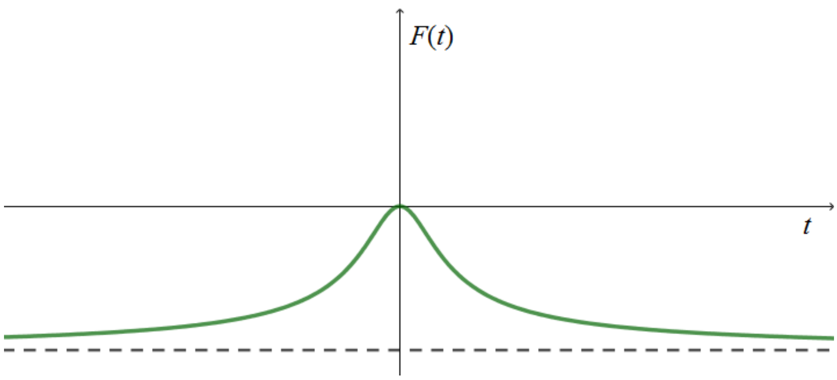
La derivata seconda di F è $F''(t) = f'(t) = \frac{2t^2 - a^2}{(t^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}$

Lo studio di F'' coincide con lo studio di $2t^2 - a^2$, cioè è positiva per $x < -\frac{a}{\sqrt{2}}$ o $x > \frac{a}{\sqrt{2}}$ e negativa $-\frac{a}{\sqrt{2}} < x < \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Due punti di flesso $t = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Per determinare la pendenza basta calcolare il valore della derivata prima nei suddetti punti $f'\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \mp\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Possiamo disegnare il grafico di F



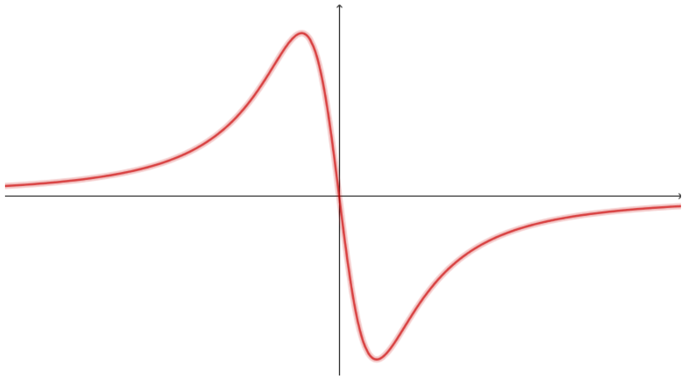
Dedurre il grafico di f da quello di F equivale a dedurre il grafico della funzione derivata da quello della funzione di partenza.

Notiamo che il dominio è tutto **R**. Poiché F è pari, f sarà dispari.

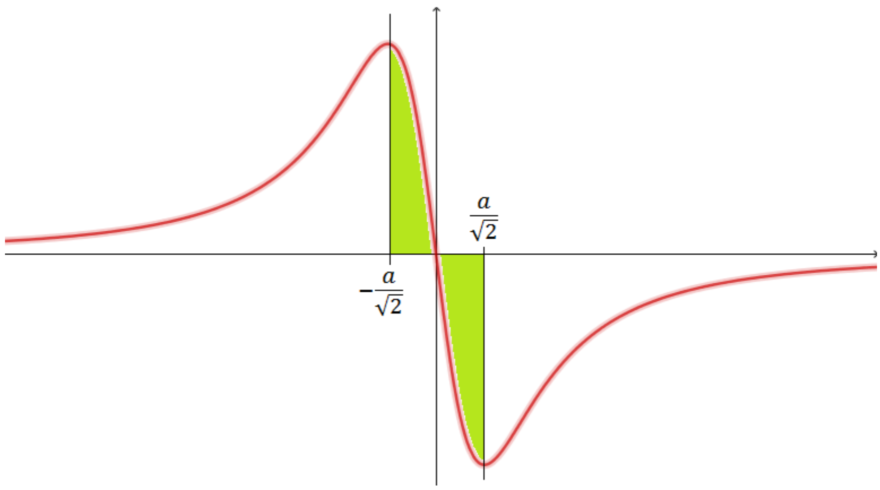
Dal grafico disegnato notiamo che f è positiva per t<0 e f è negativa per t>0 e si annulla per $t = 0$.

I flessi di F sono gli estremi di f e più precisamente t=$\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ sono rispettivamente punti di minimo e di massimo assoluti.

Il grafico di f è il seguente



L'area della regione colorata



si calcola nel seguente modo:

$$A = \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left| \frac{-t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} \right| dt$$

Notando la simmetria si ha:

$$A = 2\int_{0}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} dt = 2\left[\frac{1}{\sqrt{(t^2 + a^2)}} - \frac{1}{a} \right]_{0}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{a}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Il valore di

$$\int_{-b}^{b} f(t)dt = 0 \quad (b > 0)$$

poiché si tratta di una funzione dispari e di un intervallo di integrazione simmetrico rispetto all'origine.