Parliamo di probabilità…….

Supponiamo di avere un sacchetto con dentro una pallina rossa; posso aggiungere tante palline bianche quante voglio, per ogni pallina bianca che aggiungo devo pagare però un prezzo x. Faccio un'estrazione a sorte: se esce una pallina bianca vinco 1 euro, se esce una pallina rossa non vinco niente.
Quante palline mi conviene aggiungere affinché il guadagno (medio) sia il più grande possibile?

Questo semplice problema in realtà è modello di alcuni problemi economici nei quali occorre investire per avere un possibile guadagno futuro. La domanda è "quanto è conveniente investire per massimizzare il guadagno futuro?"
Un problema famoso è quello della ricerca di giacimenti di petrolio in una certa zona. Come è noto, tale ricerca, viene fatta con tecnologie varie che richiedono competenze diversificate (geologia, chimica e sismologia). Solo dopo un lungo lavoro di studio e di prelievi, si passa alla fase delle trivellazioni. Le variabili in gioco sono molte e complesse. Limitiamoci quindi ad ipotizzare che la probabilità di trovare il petrolio in un sito cresce con il crescere del numero delle trivellazioni che vengono fatte, ma anche le trivellazioni costano e quindi bisogna tener conto del costo di ciascuna trivellazione!

Per poter affrontare il problema abbiamo bisogno di parlare di probabilità (almeno in maniera intuitiva). Analizziamo alcune situazioni concrete….

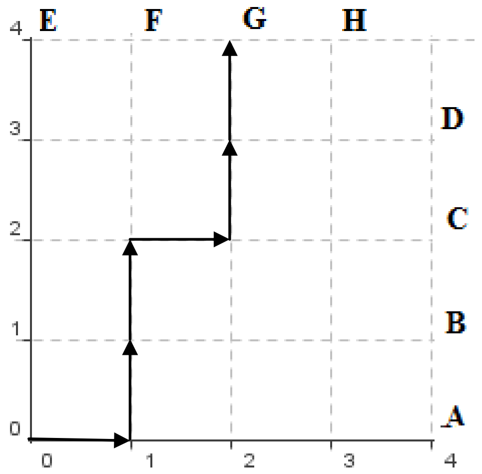
1. Se ho una moneta di 2 € e la lancio, dopo aver scelto la faccia con la testa di Dante , qual è la probabilità che esca testa? E che esca la faccia con il numero 2?
2. Se ho un dado e lo lancio, qual è la probabilità che esca il numero 1? E il numero 2? E il numero…….6?
3. Se "pesco" una carta da un mazzo di 40 carte, qual è la probabilità che esca 1 asso? E un sette? E una donna? E così via…..
4. E se il mazzo è da 52?
5. Se mi vengono sottoposti cinque pacchi e in uno solo c'è un premio, qual è la probabilità che, scegliendo a caso, io scelga quello con il premio?
6. Se ho un sacchetto con 15 palline bianche e 1 pallina nera, qual è la probabilità che, estraendo a caso, io peschi la pallina nera? E una pallina bianca?

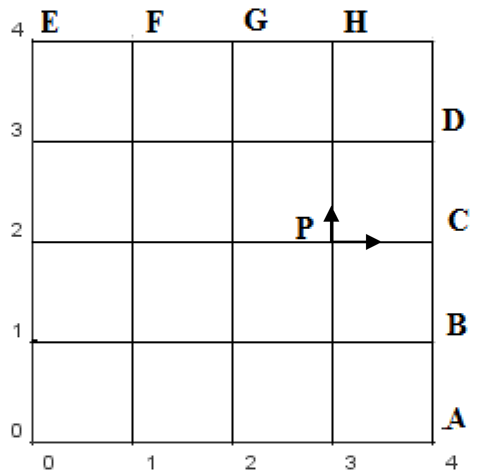
Gli esempi da 1. a 6. li possiamo vedere come "modelli probabilistici".
Nel modello "testa- croce", la probabilità di guadagnare 2 € è del 50% ,sia per la testa di Dante sia per la faccia con 2 €.
Nel modello del "dado", la probabilità per ogni faccia è di 1/6 ≈0.1(6) ≈ 16%.
Nel modello "estrazione da un mazzo di carte", se le carte sono 40, per ogni carta la probabilità è 1/40 ≈ 0.025≈ 2.5%. Se le carte sono 52, la probabilità per ogni cartaè di 1/52 ≈ 0.0192 ≈1.92%.
Nel gioco (modello) dei "pacchi" (se non c'è il trucco) la probabilità di vincere il premio è 1/5 ≈0.2 ≈20%
Nel modello "dell'estrazione da un'urna" la probabilità di estrarre la pallina nera è 1/16 ≈ 0.0625 ≈ 6.25%, quella di estrarre una pallina bianca è di 15/16 ≈ 0.94 ≈ 94% (molto alta!).

Per calcolare queste probabilità abbiamo utilizzato la definizione "classica":
"la probabilità di un evento è *il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano tutti ugualmente possibili*. Questa definizione è spesso attribuita a Pierre Simon Laplace e quindi anche identificata *definizione classica di Laplace* (da Wikipedia).
Infatti, ad esempio, nel lancio del dado (se non è truccato) e le sei facce hanno tutte la stessa possibilità di uscire la probabilità che ne esca una è 1/6.

Ancora qualche informazione…..
Nel 1654 il Cavaliere di Merè propose a Pascal il seguente problema: Due giocatori di pari abilità (quindi supponiamo ciascuno con probabilità 1/2 di vincere) disputano alcune partite. Vince il gioco chi per primo

totalizza 4 vincite. Ma prima di concludere il gioco, decidono di non proseguire e di ripartire la posta nel modo più giusto possibile, in base alla situazione del gioco.
Ad esempio se al momento della sospensione il primo giocatore ha vinto 3 partite e il secondo 2 e la posta è di 10 €. Come deve essere ripartita?
Ovviamente in proporzione alla probabilità che hanno di vincere al momento della sospensione!
Aiutiamoci con un grafico cosiddetto a maglie quadrate: i punti d'incrocio (o nodi) rappresentano una (qualsiasi) possibile situazione di gioco.





Nella seconda figura P rappresenta la situazione in cui il primo giocatore ha vinto 3 partite e il secondo 2. Analizziamo come potrebbe proseguire il gioco.
Se nella successiva partita vince il primo giocatore, il punto si sposta a destra di un tratto, se invece vince il secondo allora il punto si sposta in alto di un tratto. E così via.

Il gioco si conclude quando il punteggio del primo giocatore arriva a 4 (ovvero raggiunge uno dei 4 punti A, B, C, D) oppure il secondo giocatore arriva a 4 (ovvero raggiunge uno dei 4 punti E, F, G, H).
Si tratta di contare il numero di cammini, sapendo che (per la regola del prodotto) ad ogni tratto la probabilità viene moltiplicata per 1/2.
Partendo da P si può arrivare solo ai punti C, D e H.
Per arrivare a C c'è un unico cammino di 1 tratto quindi la probabilità è 1/2.
Per arrivare a D c'è un unico cammino di 2 tratti quindi la probabilità (1/2)(1/2)= 1/4.
Per arrivare a H c'è un unico cammino di 2 tratti quindi la probabilità (1/2)(1/2)= 1/4.
In totale la probabilità di vincere per il primo giocatore è (1/2)+(1/4)= 3/4= 0.75 = 75%, per il secondo giocatore è invece di 1/4 =0.25 =25%
Si può osservare che la somma delle probabilità è 1 e allora 10 € devono essere così suddivise: al primo giocatore il 75% di 10 € cioè 7.50 € al secondo il 25% cioè 2.5 €.

Ancora qualche informazione…..
Supponiamo di avere un sacchetto con 3 palline rosse e 2 bianche, la probabilità di estrarre a caso una pallina rossa è 3/5 e di estrarre una pallina bianca è 2/5. Due giocatori A e B trasformano l'estrazione in un gioco d'azzardo in questo modo:

A riceve da B 4 € tutte le volte che esce una pallina rossa
B riceve da A 5 € tutte le volte che esce una pallina bianca
Allora il ricavo possibile del giocatore A è (3/5)x4=2.4 € per ogni colpo, nello stesso tempo però A ha una perdita di 5€ ogni volta che esce una pallina bianca, la sua perdita probabile è data da (2/5)x5= 2 € ad ogni colpo. Il **guadagno medio** del giocatore A è quindi, ad ogni colpo, (2.4 – 2)€ = 0.4 €

Finalmente torniamo ora al nostro problema iniziale…

Supponiamo di avere un sacchetto con dentro una pallina rossa; posso aggiungere tante palline bianche quante voglio, per ogni pallina bianca che aggiungo devo pagare però un prezzo x. Faccio un'estrazione a sorte: se esce una pallina bianca vinco 1 euro, se esce una pallina rossa non vinco niente.
Quante palline mi conviene aggiungere affinché il guadagno medio sia il più grande possibile?

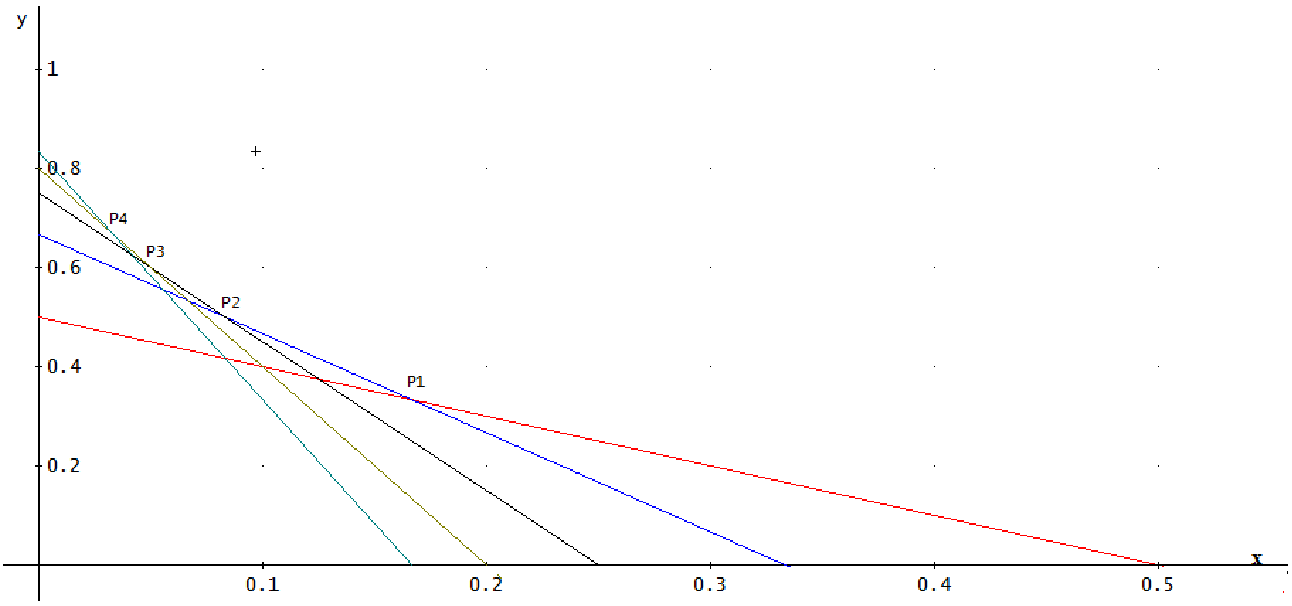
Dati:
1 pallina rossa, n palline bianche acquistate al prezzo x
Se esce una pallina bianca vinco 1€, se esce rossa non vinco niente.

Soluzione proposta.

La probabilità che esca una pallina bianca è $\frac{n}{n+1}$ quindi il guadagno medio (lo indico con y) è dato da

$y = \frac{n}{n+1} \cdot 2 - nx$ dove il primo termine rappresenta la vincita media e il secondo la somma spesa.

Rappresentiamo graficamente la situazione per n = 1, 2, 3, 4………



Per n = 1 ho la retta $y = \frac{1}{2} - x$

Per n =2 ho la retta $y = \frac{2}{3} - 2x$

Per n = 3 ho la retta $y = \frac{3}{4} - 3x$

Per n =4 ho la retta $y = \frac{4}{5} - 4x$

Per n = 5 ho la retta $y = \frac{5}{6} - 5x$ e così via…..

Per ogni x fissato devo prendere l'intero positivo n tale che l'ordinata della relativa retta sia la più grande possibile.

Osserviamo i grafici.

Per x ≥ 0.5 il gioco non è conveniente.

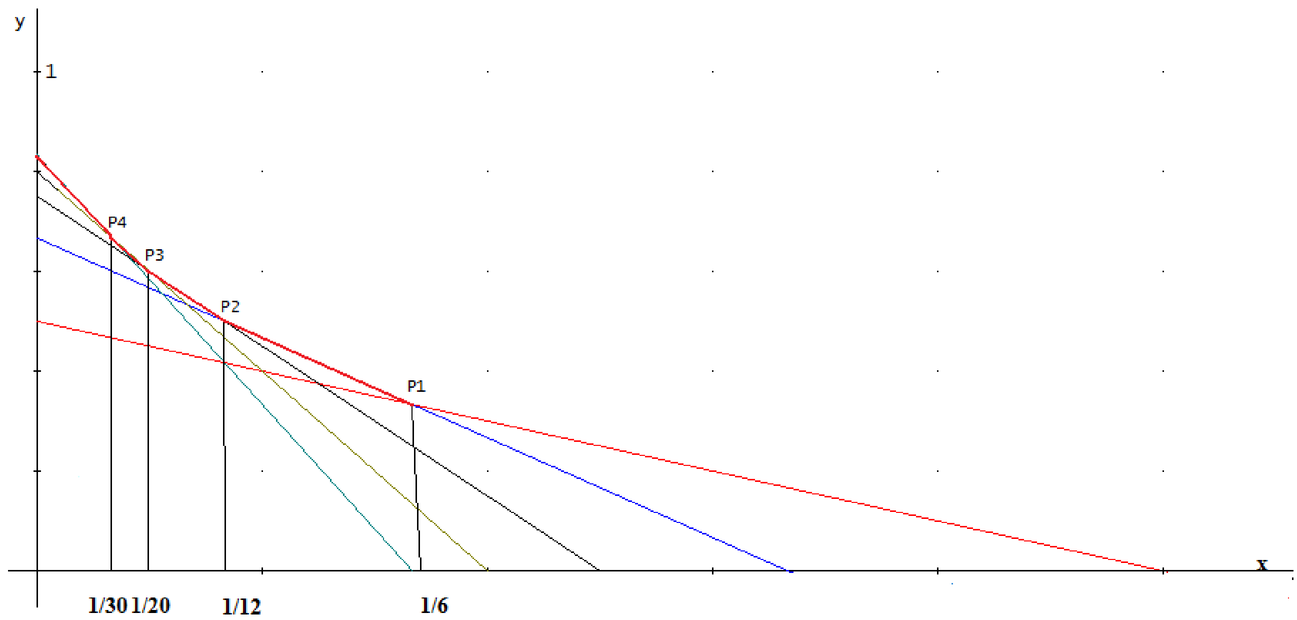
Intersechiamo le rette individuando i punti P1, P2, P3 ecc

P1 = $\begin{cases} y = \frac{1}{2} - x \\ y = \frac{2}{3} - 2x \end{cases}$ da cui $x = \frac{1}{6}$ e $y = \frac{1}{3}$

P2 = $\begin{cases} y = \frac{2}{3} - 2x \\ y = \frac{3}{4} - 3x \end{cases}$ da cui $x = \frac{1}{12}$ e $y = \frac{1}{2}$

P3 = $\begin{cases} y = \frac{3}{4} - 3x \\ y = \frac{4}{5} - 4x \end{cases}$ da cui $x = \frac{1}{20}$ e $y = \frac{3}{4}$

Si osserva che al crescere di n la pendenza della retta diminuisce per cui:



Se x > $\frac{1}{6}$ la retta $y = \frac{1}{2} - x$ è "sopra" la retta $y = \frac{2}{3} - 2x$

Se x > $\frac{1}{12}$ la retta $y = \frac{2}{3} - 2x$ è "sopra" la retta $y = \frac{3}{4} - 3x$

Se x > $\frac{1}{20}$ la retta $y = \frac{3}{4} - 3x$ è “sopra” la retta $y = \frac{4}{5} - 4x$ e così via…..

Conclusioni:

$\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{2}$ il valore ottimale di n è n =1

$\frac{1}{12} \leq x \leq \frac{1}{6}$ il valore ottimale di n è n =2

$\frac{1}{12} \leq x \leq \frac{1}{12}$ il valore ottimale di n è n =3 e così via.