Problema 1

1) La $f(x)$ è una funzione concava e quindi la "ruota" quadrata rimane interamente al di sopra della curva. Osserviamo inoltre che la curva ammette un asse di simmetria, che in questo caso è l'asse delle y (si tratta di una funzione pari).
Per calcolare il valore di a, è necessario risolvere l'equazione:
$$\sqrt{2}-\frac{e^x+e^{-x}}{2}=0$$
ricavando l'equazione di secondo grado in e^x:
$$e^{2x}-2\sqrt{2}e^x+1=0$$
da cui si ottiene:
$$x_1=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$
$$x_2=\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$
Quindi $a=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

2) Si calcolano i valori che la derivata prima della funzione $f(x)$ assume nei punti $x_1=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ e $x_2=-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$. Poiché:
$$f'(x)=\frac{-e^x+e^{-x}}{2}$$
si ottiene che $f'\left(\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)=-1$.
Per la simmetria della funzione rispetto all'asse delle y, si ha $f'\left(-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)=1$.
Dunque è rispettata la condizione di ortogonalità.
Si calcola l'integrale
$$\int_{-\ln(\sqrt{2}+1)}^{\ln(\sqrt{2}+1)}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=2\int_0^{\ln(\sqrt{2}+1)}\sqrt{1+\left(\frac{-e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx=$$
$$=2\int_0^{\ln(\sqrt{2}+1)}\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=2\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^{\ln(\sqrt{2}+1)}=2$$

3) Per la similitudine dei triangoli rettangoli ACL e ALM si ha l'uguaglianza di angoli $M\hat{A}L=L\hat{C}A$ la cui tangente trigonometrica è $f'(x)$. Dunque $AL=f'(x)$. L'ordinata d del centro C è data da $AC+f(x)$.
Per il teorema di Pitagora:

$$AC = \sqrt{CL^2 + AL^2} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

In conclusione

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} + f(x) = \sqrt{2}$$

4) Analogamente al 2), calcoliamo $f'\left(-\ln\sqrt{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$. Dunque l'angolo interno del poligono regolare cercato sarà $\frac{2}{3}\pi$. Si tratta dunque di un esagono.