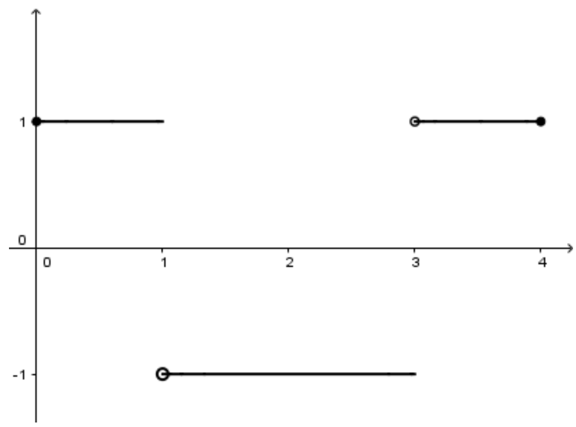
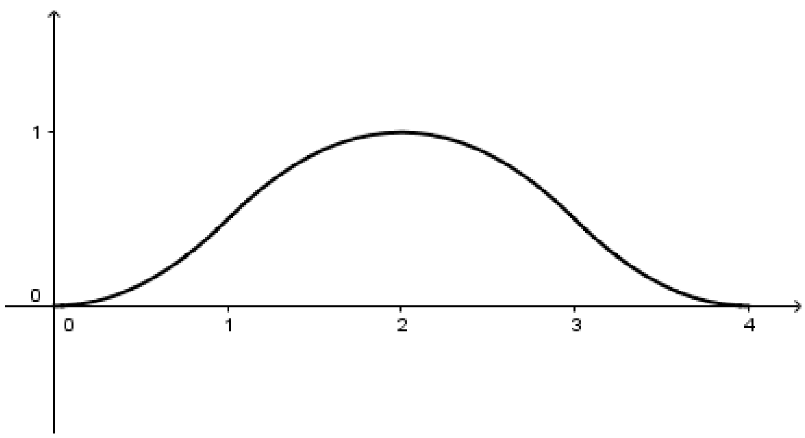
Problema 2

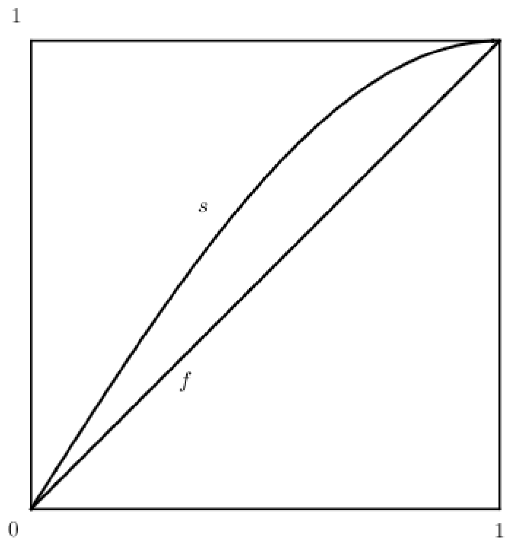
1) La funzione f è ovviamente continua su tutto **R**. Dal grafico (che presenta dei punti angolosi in $x = 1$ e in $x = 3$) si deduce che f è derivabile su tutto **R** tranne che nei punti $x = 1 + 2k$ con k intero relativo.
   Il limite di f, per $x \to +\infty$, non esiste in quanto f è funzione periodica con oscillazioni di ampiezza costante. Il limite di $\frac{f(x)}{x}$, per $x \to +\infty$, invece esiste per il criterio del confronto: $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ dove quest'ultima funzione è infinitesima.
   Sarebbe facile scrivere le espressioni analitiche che definiscono la f e da qui dedurre quelle che definiscono le funzioni g e h, con i rispettivi grafici. Si può però più semplicemente procedere senza calcoli in base all'analisi sul grafico della funzione f. Si chiede di rappresentare il grafico della funzione derivata. Alcune considerazioni: la funzione f è costituita da segmenti di rette, quindi la sua derivata nei vari intervalli è costante e tale costante ha il valore del coefficiente angolare della retta alla quale il segmento appartiene. In particolare la funzione g nell'intervallo $[0, 1)$ vale 1, nell'intervallo $(1,3)$ vale -1 e nell'intervallo $(3,4]$ vale 1; ricordiamo che nei punti $x = 1$ e $x = 3$ non esiste la derivata prima. Di conseguenza il grafico di g è:



   Per quanto riguarda il grafico di h che è una funzione integrale potremmo riferirci all'analisi dei grafici di f e di g, tenendo presente che il grafico di f è il grafico della derivata prima di h (basta ricordare il teorema di Torricelli Barrow per il calcolo integrale) e che il grafico di g è quello della derivata seconda di h. Se ne deduce che nell'intervallo $[0,1]$ la funzione h è crescente e convessa; allo stesso modo nel punto $x = 2$ la funzione presenta un massimo assoluto (cresce in $(1,2)$ e decresce in $(2,3)$ ed è sempre concava); infine nell'intervallo $(3,4)$ è decrescente e convessa. Si deducono anche i due punti di flesso in $x = 1$ e in $x = 3$. Il grafico di h è:



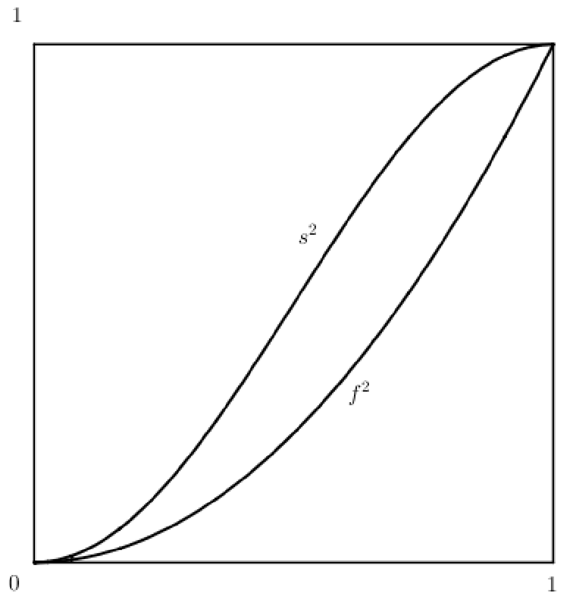
2) Il periodo della funzione s è dato da $\frac{2\pi}{b}$. Perché risulti uguale a 4 occorre che sia $b = \frac{\pi}{2}$.



Dal grafico si vede che effettivamente il quadrato di lato 1 viene suddiviso dai diagrammi di f e s in tre parti distinte: il grafico di s sta sempre non al di sotto di quello della retta $y = x$ come si deduce dal calcolo di $s'(0)$ e $s'(1)$.

Le probabilità richieste sono date da un rapporto tra aree (dove l'area del quadrato unitario – "tutti i casi possibili" – vale ovviamente 1). In particolare, la probabilità che il punto preso a caso cada nella regione inferiore vale $\frac{1}{2}$. La probabilità che il punto preso a caso cada nella regione intermedia è data da $\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx - \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}$. Infine, la probabilità che il punto preso a caso cada nella regione superiore è data dalla differenza tra l'area del quadrato unitario e la precedente area, ovvero da: $1 - \frac{2}{\pi}$.

3) Il precedente grafico, relativo ora alle funzioni f^2 e s^2, diventa:



Essendo sempre $f^2 \leq f$, la probabilità che il punto preso a caso cada nella regione inferiore è ora minore della probabilità che il punto preso a caso cada nella regione inferiore del grafico precedente.
La nuova area intermedia A' si ottiene come differenza tra l'area sottesa da s^2 e quella sottesa da f^2, mentre la precedente (che abbiamo calcolato) valeva $\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}$. Dedurre qualcosa da un confronto grafico non è possibile. Procediamo con i calcoli:

$$A' = \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi}{2} x \ dx - \int_0^1 x^2 \ dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos \pi x}{2} \ dx - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Confrontando le misure delle due aree, si trova che $\frac{1}{6} > \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}$. Di conseguenza, la probabilità che il punto cada ora nella regione intermedia risulterà maggiore della probabilità che il punto cada nella regione intermedia del grafico precedente.
Infine, essendo sempre $s^2 \leq s$, la probabilità che il punto cada nella regione superiore è ora maggiore della probabilità che il punto cada nella regione superiore del grafico precedente.

4) Utilizzando la formula per il volume dei solidi di rotazione rispetto all'asse y

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

si ottiene: $V = 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx + 2\pi \int_1^3 \left(-\frac{x^3}{2} + 2x^2 - x\right) dx$. Con facili calcoli si ottiene alla fine $V = \frac{83}{12}\pi$.