QUESTIONARIO

Quesito 1

Da $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, si ha: $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} < 1$. Quindi, per avere $\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}dx = 1$, deve essere u >0.

L'integrale A è calcolato su un intervallo simmetrico e la funzione integranda è dispari; il valore di A è zero.

L'integrale B è calcolato su un intervallo simmetrico e la funzione integranda è pari; quindi si ha:

$$\int_{-u}^{u} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{u} e^{-x^2}dx$$

Calcoliamo quest'ultimo integrale nel seguente modo:

$$1 = \int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx + \int_{o}^{u} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_{o}^{u} e^{-x^2}dx$$

Quindi: $\int_{-u}^{u} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{u} e^{-x^2}dx = 2\left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

Per l'integrale C eseguiamo una sostituzione, ponendo:

$\sqrt{5}x = t \qquad dx = \frac{dt}{\sqrt{5}}$. Otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{5}}.$$

Quesito 2

Indichiamo con $2h$ e di conseguenza $1 - ah^2$ le dimensioni del rettangolo iscritto; quindi la sua area sarà uguale a: $A = 2h(1 - ah^2)$ e il suo perimetro: $2p = 4h + 2(1 - ah^2)$.

Le due grandezze calcolate sono funzioni della variabile h, calcoliamone le rispettive derivate:

$A'(h) = 2 - 6ah^2$ e $2p'(h) = 4 - 4ah$. Otteniamo: $\begin{cases} 2 - 6ah^2 = 0 \\ 4 - 4ah = 0 \end{cases}$, da cui: $h = \frac{1}{a}$ e $a = 3$.

Si noti che in realtà il rettangolo iscritto è un quadrato il cui lato misura $\frac{2}{3}$.

Quesito 3

Consideriamo la sfera con centro nell'origine; per calcolarne il volume utilizziamo la nota formula:

$$V = \pi\int_{-r}^{h-r}(r^2 - y^2)dy = \pi\left[r^2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-r}^{h-r} = \pi\left(h^2r - \frac{h^3}{3}\right).$$

Quesito 4

Indichiamo con X la variabile aleatoria definita come il numero di domande, tra le 10 proposte, alle quali si risponde correttamente. Dal momento che le risposte vengono date a caso e che le possibilità sono 4 (di cui solo una esatta) , la probabilità di rispondere correttamente ad una domanda è 0.25. Assumendo (realisticamente) che le risposte alle diverse domande siano tra loro "indipendenti", la variabile aleatoria X si può vedere come numero di successi su 10 prove indipendenti, ciascuna con probabilità di successo 0.25, per cui X ha distribuzione binomiale di parametri 10 e 0.25. La probabilità di superare il test è quindi:

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$$
$$= \frac{10!}{8!\,2!} 0.25^8\, 0.75^2 + \frac{10!}{9!\,1!} 0.25^9\, 0.75^1 + \frac{10!}{10!\,0!} 0.25^{10}\, 0.75^0 = \ \ 0.00041$$

Quesito 5

Il punto di tangenza P appartiene al piano e si trova sulla perpendicolare al piano passante per il punto K. Il generico punto sulla retta normale ha coordinate: $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$; se le sostituiamo nell'equazione del piano, troviamo $t = 1$. Quindi (0, -3,3) sono le coordinate del punto di tangenza. Di conseguenza, il raggio è la distanza tra i punti K e P: $r = \sqrt{4+4+1} = 3$.

Quesito 6

Non esiste alcun polinomio $P(x)$ che soddisfi per ogni x reale la disuguaglianza indicata. Infatti i valori assunti dalla funzione coseno variano tra -1 e 1 mentre quelli di un polinomio diventano grandi (in valore assoluto) a piacere.

Quesito 7

Il numero di percorsi possibili per raggiungere la casella A partendo dalla posizione indicata è pari a $\frac{14!}{7!7!} = 3432$.

Il numero di percorsi, tra questi, che passano per la casella B è pari al prodotto di $\frac{8!}{5!3!} = 56$ e $\frac{6!}{2!4!} = 15$.

Essendo tutti i percorsi equiprobabili, la probabilità dell'evento cercato è data dal rapporto tra numero di casi favorevoli e numero totale di casi, quindi:

$$Prob = \frac{56 * 15}{3432} = 0.24476$$

Quesito 8

Calcoliamo tutte le primitive della funzione data:

$$y = \int e^x \left(2x + x^2\right) dx = e^x \left(2x + x^2\right) - \int e^x (2 + 2x) dx =$$
$$= e^x \left(2x + x^2\right) - e^x (2 + 2x) + \int 2e^x\, dx =$$
$$= e^x \left(2x + x^2\right) - e^x (2 + 2x) + 2e^x =$$
$$= x^2 e^x + C$$

Fra queste individuiamo quella che passa per il punto (1, 2e):

$2e = e + C$ da cui: $C = e$. La primitiva cercata è: $y = x^2 e^x + e$.

Quesito 9

I parametri direttori delle due rette sono: $(1,2,1)$ e $(1,2,-3)$.

Il piano parallelo alle due rette ha come vettore normale il vettore perpendicolare ai parametri direttori delle due rette. Quindi è sufficiente calcolare il prodotto vettoriale tra i suddetti vettori; si ottiene: $\underline{n} = (-8,4,0)$. L'equazione del piano cercato: $-8(x-1) + 4y = 0$; quindi $-2x + y + 2 = 0$.

Quesito 10

L’equazione della retta richiesta è: $y - f\left(\sqrt{e}\right) = f\,'\left(\sqrt{e}\right)\cdot\left(x - \sqrt{e}\right)$.

Risulta: $f\left(\sqrt{e}\right) = 0$; da $f\,'(x) = \dfrac{x^2}{\ln x^2}\cdot 2x$, segue $f\,'\left(\sqrt{e}\right) = 2e\sqrt{e}$.

L’equazione della retta tangente è dunque: $y = 2e\sqrt{e}\cdot\left(x - \sqrt{e}\right)$.