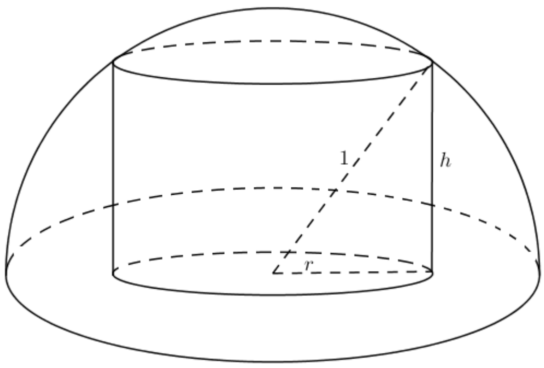
Questionario

1. Si ha:

$$\int_0^1 x^2e^xdx = [x^2e^x]_0^1 - 2\int_0^1 xe^xdx = e - 2E$$

$$\int_0^1 x^3e^xdx = [x^3e^x]_0^1 - 3\int_0^1 x^2e^xdx = e - 3(e-2E) = 6E - 2e$$

2. Supponiamo che la semisfera abbia raggio uguale a 1. Sia h l'altezza della torta cilindrica e r il suo raggio. Allora $r = \sqrt{1-h^2}$ e il volume della torta risulta $V = \pi(1-h^2)\cdot h$, da confrontare con il volume della semisfera $\frac{2}{3}\pi$.



Troviamo il massimo della funzione che esprime il rapporto $f(h) = \frac{3}{2}(1-h^2)\cdot h$ nell'intervallo $[0,1]$:

$f'(h) = \frac{3}{2}(1-3h^2)$

$f'(h) = 0$ per $h = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Il massimo locale cercato si ha per $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{3}{5}$$

ricordiamo che $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{3}{5}$ poiché, elevando ambo i membri al quadrato, $\frac{1}{3} < \frac{9}{25}$.

3. L'esercizio si può risolvere utilizzando il teorema di De l'Hôpital. Utilizzando invece uno sviluppo di MacLaurin (per la funzione "radice quadrata"), si ottiene:

$$\sqrt{ax+2b} - 6 = \sqrt{2b}\cdot\sqrt{1+\frac{ax}{2b}} - 6 = \sqrt{2b}\cdot\left(1+\frac{ax}{4b}+\cdots\right) - 6 = \sqrt{2b} - 6 + \frac{ax}{2\sqrt{2b}} + \cdots$$

Questa espressione è asintotica a x (per $x \to 0$) se il termine noto si annulla (ovvero $\sqrt{2b} - 6 = 0$, ovvero $b = 18$) e se il coefficiente di x è uguale a 1 (ovvero $\frac{a}{2\sqrt{2b}} = 1$, ovvero $a = 12$).

4. Il valore medio dei numeri generati è:

$$\int_0^2 x\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3\right)dx=\frac{3}{2}\int_0^2 x^3dx-\frac{3}{4}\int_0^2 x^4dx=\frac{6}{5}$$

La probabilità che il primo numero estratto sia 4/3 è zero dato che la distribuzione è continua.

Poiché la distribuzione è continua, le estrazioni precedenti non influenzano quelle successive. Pertanto possiamo trascurare l'indicazione che sia il secondo numero.

Dunque la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1 è:

$$\int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3\right)dx=\frac{5}{16}$$

5. In forma parametrica la retta AB diventa:

$$\begin{cases} x=-2+5t \\ y=3-3t \\ z=1-2t \end{cases}$$

dove come punto iniziale si è preso A e la direzione è data da $B-A$.

I piani passanti per C sono dati da:

$$a(x-2)+b(y-2)+c(z+3)=0$$

dove a, b, c rappresentano la direzione della retta perpendicolare al piano. Dunque:

$$5(x-2)-3(y-2)-2(z+3)=0$$
$$5x-3y-2z-10=0$$

6. Utilizzando lo sviluppo di MacLaurin per la funzione $y=\sin x$, si ha che per $x\to 0$ la funzione $\frac{\sin x-x}{x^a}$ si comporta come:

$$\frac{-x^3/6}{x^a}=-\frac{1}{6}x^{3-a}$$

Il limite di quest'ultima espressione è finito e diverso da zero per $a=3$.

7. I centri delle sfere si trovano sulla retta passante per $P(1,0,2)$ e perpendicolare al piano π. La direzione della perpendicolare è $(1,2,-1)$ che normalizzata diventa $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Dunque i centri delle sfere si ottengono:

$$P\pm r\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$(1,0,2) \pm \sqrt{6} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

vale a dire $C_1 = (2,2,1)$ e $C_2 = (0,-2,3)$.

8. La probabilità che esca una faccia diversa da 3 è $\frac{p}{2}$. Dunque p deve soddisfare:

$$p + 11 \cdot \frac{p}{2} = 1$$

da cui si ricava

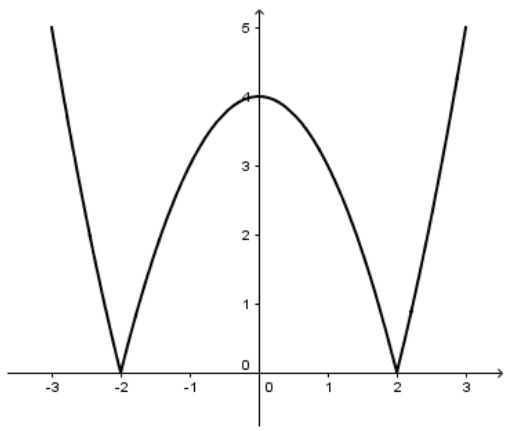
$$p = \frac{2}{13} = 15{,}38\%$$

La probabilità che la faccia 3 esca almeno due volte in 5 lanci può essere calcolata come 1 – probabilità dell'evento complementare, ovvero che esca la faccia contrassegnata dal 3 un numero di volte pari a zero o uno. Dunque la probabilità richiesta è:

$$1 - \left(\frac{11}{13}\right)^5 - 5 \cdot \left(\frac{11}{13}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{13}\right) = 0{,}1719$$

9. Dal fatto che il limite di $f(x) = \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$ e che la derivata prima $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 3x^2 + e^x$ è sempre positiva (e quindi la funzione è sempre strettamente crescente) si deduce che l'equazione proposta ha un'unica soluzione reale.

10. La funzione data è continua su **R** ed è tale che $f(-3) = f(3)$; non è però derivabile nei punti $x = \pm 2$ come si vede chiaramente dal grafico.



Tuttavia in $x = 0$ la sua derivata si annulla. Una tale conclusione non contraddice il teorema di Rolle in quanto esso esprime una condizione solo sufficiente.