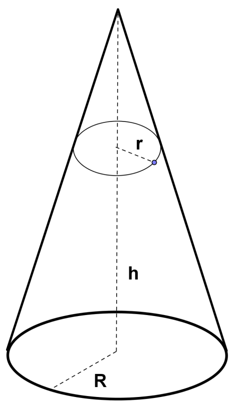
1. Da $f'(x) = -2x^2 + 6$, deduciamo $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + c$. Resta da determinare il valore di $c \in \mathbb{R}$. Dall'informazione relativa al punto di tangenza (uguaglianza delle derivate prime), si ricava $-2 = -2x^2 + 6$ ovvero $x = \pm 2$ ovvero $x = -2$ (secondo quadrante). In questo punto di tangenza, si ha $f(-2) = y(-2) = 9$. L'uguaglianza $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + c$, per $x = -2$ diventa:

$$9 = \frac{16}{3} - 12 + c$$

da cui $c = \frac{47}{3}$.L'espressione analitica richiesta è

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + \frac{47}{3}$$

2. Completiamo il tronco di cono ottenendo un cono di altezza H.



Il volume del tronco si ottiene per differenza dal volume dei due coni, l'uno di altezza H e raggio di base R, l'altro di altezza $H - h$ e raggio di base r. Determiniamo H in funzione dei dati:

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{H - h}$$

da cui:

$$H = \frac{h(R - r)}{R}.$$

Quindi:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(\frac{R^3 - r^3}{R - r}) = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$$

3. Indichiamo con X il numero di teste ottenute in sei lanci della moneta (supposta ovviamente *regolare*): la variabile aleatoria X ha distribuzione binomiale di parametri $n = 6$ e $p = 1/2$. Dunque, per quanto riguarda la prima probabilitá richiesta, si ha:

$$Prob(X \leq 2) = Prob(X = 0) + Prob(X = 1) + Prob(X = 2) =$$

$$\binom{6}{0}(1/2)^6 + \binom{6}{1}(1/2)(1/2)^5 + \binom{6}{2}(1/2)^2(1/2)^4 = 11/32 = 0.34375.$$

Per quanto riguarda la seconda probabilitá, si ha:

$$Prob(X \geq 2) = 1 - Prob(X = 0) - Prob(X = 1) =$$

$$1 - \binom{6}{0}(1/2)^6 - \binom{6}{1}(1/2)(1/2)^5 = 57/64 = 0.890625.$$

4. Da $y = \dfrac{\ln x}{x}$ segue:

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \qquad y'' = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

Andando a sostituire questa espressione nelle quattro equazioni differenziali proposte si trova che l'unica soddisfatta per ogni $x > 0$ è la quarta.

5. La direzione ortogonale al piano è individuata dai coefficienti delle incognite: (1,1,-1)
Quindi l'espressione analitica della retta richiesta sarà $x = y = -z$

6. Risulta $f'(x) = 2[x+1+x-2+x-3+x-4+x-5] = 2(5x-15)$ da cui $f'(x) = 0$ per $x = 3$. Essendo $f'(x) \gtrless$ per $x \gtrless 3$ si ha che $x = 3$ è effettivamente il punto di minimo (assoluto) di f con $f(3) = 10$

7. L'area di ciascuno spicchio del poligono regolare di n di lati inscritto nella circonferenza di raggio r è uguale $\frac{1}{2}r^2 \sin\frac{2\pi}{n}$ dove $\frac{2\pi}{n}$ è l'angolo al centro dello spicchio.
   Quindi $S = \frac{n}{2}r^2 \sin\frac{2\pi}{n}$
   Per $n \to \infty$, $\sin\frac{2\pi}{n}$ è asintotico a $\frac{2\pi}{n}$ e quindi il limite di S è πr^2.

8. Il punto P dista piú di 2 cm da ogni vertice se non giace in nessuno dei tre *spicchi* di lato 2 cm corrispondenti ai tre vertici, ovvero se giace nella regione *centrale* del triangolo ottenuta eliminando i tre spicchi suddetti. Poiché la somma degli angoli interni ad un triangolo é π, l'area complessiva A_S dei tre spicchi é pari a metá dell'area di un cerchio di raggio 2 cm, per cui:
$$A_S = \pi(2^2)/2 = 2\pi.$$
   L'area complessiva del triangolo, A_T, é data da:
$$A_T = \frac{1}{2}5\sqrt{6^2-(5/2)^2} = \frac{5}{4}\sqrt{119}.$$
   Dunque l'area della regione *centrale* del triangolo é la differenza:
$$A_C = A_T - A_S = \frac{5}{4}\sqrt{119} - 2\pi$$
   e, quindi, la probabilitá cercata é data dal rapporto tra l'area della regione centrale e l'area totale, ovvero da
$$\frac{A_C}{A_T} = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{119}-2\pi}{\frac{5}{4}\sqrt{119}} = 1 - \frac{8\pi}{5\sqrt{119}} = 0.5392$$
   (il risultato é stato arrotondato alla quarta cifra decimale).

9. Per la funzione f l'unico punto in cui bisogna verificare le ipotesi del teorema di Lagrange (cioè stabilire la continuità e la derivabilità) é $x = 1$. In tal punto f risulta continua in quanto per ogni k accade che:
$$\lim_{x\to 1^-} x^3 = \lim_{x\to 1^+}(x^2 - kx + k) = 1$$
   Stabiliamo la derivabilità:
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \le x < 1 \\ 2x - k & 1 < x \le 2 \end{cases}$$
   Dall'uguaglianza: $3 = 2 - k$ deduciamo $k = -1$.
   Per questa funzione (con $k = -1$) il teorema di Lagrange permette di scrivere l'uguaglianza:
$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(c), \qquad c \in (0,2)$$
   ovvero $\frac{5}{2} = f'(c)$ soddisfatta solo per $\frac{5}{2} = x^2$ ovvero (nell'intervallo (0,1)) $x = \sqrt{\frac{5}{6}}$

10. L'area del rettangolo è 6. L'area della regione sottesa dal grafico di $y = \sqrt{x}$, compresa tra $x = 1$ e $x = 4$, è data da:
$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_1^4 = \frac{14}{3}$$
    Naturalmente, l'area dell'altra porzione del rettangolo è uguale a: $6 - \frac{14}{3} = \frac{4}{3}$.
    Il rapporto tra le aree delle due porzioni è dunque uguale a $\frac{7}{2}$ (oppure $\frac{2}{7}$).