* 032

Pitagora e la musica //

Nicola Chiriano
Docente al Liceo scientifico "L. Siciliani" di Catanzaro

[NICOLA CHIRIANO]

Nicola Chiriano è docente di Matematica e Fisica al Liceo scientifico "Siciliani" di Catanzaro. Si occupa di didattica e tecnologie dell'informazione e della comunicazione (TIC) ed è formatore in didattica della Matematica per docenti di vari ordini di scuola. Ha all'attivo diverse collaborazioni con Ansas (e-tutor corsi Pon Tec) e Invalsi (piano di formazione Ocse-Pisa). È appassionato di matematica della musica e di musica della matematica.

[PREMESSA]

Musica e Matematica sono da sempre così indissolubilmente legate (fra loro e con la Fisica, l'Acustica in particolare) da avere innumerevoli punti e ponti di contatto nella storia dell'evoluzione di concetti ad esse propri, iniziando dalle loro origini. Basti pensare a caratteristiche musicali prettamente compositive quali il *ritmo* (collegato al tempo), la notazione sul *pentagramma* (una rappresentazione grafica nel piano, in cui i *canoni* sono ottimi esempi di simmetrie), la *durata* di note e pause (che in Musica sono parimenti importanti) e il conseguente metro (la durata delle battute in uno spartito).

Innumerevoli sono poi gli articoli, i testi e le pagine web che trattano delle relazioni tra Musica e Matematica. Ad alcuni di questi, elencati alla fine, faremo più volte riferimento nel nostro discorso in cui proveremo, cercando di non esagerare con i dettagli di teoria musicale, ad intraprendere un percorso particolare: verificare come la necessità di "ampliare" gli **insiemi numerici**, nell'ordine in cui sono nati e con cui vengono appresi a scuola, possa venir fuori non già da astratte congetture matematiche, ma dall'esperienza dei musicisti che, nel corso dei secoli, hanno fissato la **scala musicale**.

[IPSE SONAVIT]

La prima tappa del nostro percorso non può che essere Crotone, città natale di Rino Gaetano e Sergio Cammariere e, due millenni e mezzo prima, patria adottiva di quel gran genio del nostro amico **Pitagora** che vi si rifugiò su invito del dio Apollo (*patron* delle Muse, custodi delle attività umane definite per l'appunto *musica*) e, più probabilmente, per il fatto che a quei tempi Crotone era la prima città della Magna Grecia anche per importanza culturale.
Pitagora, dalla Musica, provò addirittura a dedurre le leggi matematiche dell'universo. Noi dedurremo il solo passaggio dai numeri **interi** a quelli **razionali**, in cui la musica giocò un ruolo fondamentale.

Nonostante Pitagora avesse infatti basato la sua dottrina sui numeri interi, specie quelli dall'1 al 4 che formavano la cosiddetta *tetraktys*, praticando la mu-

sica a scopi catartici, scoprì come le **altezze** dei suoni fossero legate tra loro da precisi rapporti numerici ovvero da numeri razionali. Una scoperta fondamentale tanto da venir immortalata nel motto per cui *tutto è numero (razionale)*.
La scoperta sarebbe avvenne percuotendo un'anfora ripiena con dell'acqua che poi, riempita ulteriormente, emetteva la stessa nota ma più acuta. Tra le varianti dell'aneddoto, quella tramandataci da **Giamblico di Calcide** è sicuramente la più gustosa. L'intuizione di Pitagora, d'importanza pari a quella "dell'uso di compasso, riga e bilancia", sarebbe merito di un... metallaro ovvero di un fabbro crotonese che martellava il ferro con mazze di grandezze diverse. Tra i tintinnii che i colpi producevano sulle incudini, alcuni risultavano più gradevoli di altri. Indagando sul perché, Pitagora scoprì che martelli i cui pesi stavano in precisi rapporti producevano suoni **consonanti**.
Da precursore del metodo scientifico tornò in laboratorio dove, usando una "chitarra" primordiale, evoluzione del **monocordo**, studiò i suoni prodotti da corde elastiche (nervi di bue) messe in tensione grazie a pesi differenti. Scoprì che la consonanza tra coppie di suoni si ripeteva quando tali tensioni stavano fra loro come 4:1 o come 9:4, esattamente come i pesi dei martelli del fabbro. Anzi, può darsi che per l'esperimento abbia usato come pesi proprio gli stessi martelli dell'ignaro fabbro...

Come oggi sappiamo, la **frequenza** (la "nota") fondamentale f_0 del suono emesso da una corda tesa posta in vibrazione è direttamente proporzionale alla radice quadrata della tensione *T* cui la corda è sottoposta. È invece inversamente proporzionale alla sua lunghezza *L* e, sotto radice, alla sua densità *ρ* e alla sua sezione *S*:

$$f_0 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho S}}$$

La nota emessa da una corda tesa da un peso quadruplo ha quindi frequenza doppia: diremo che dista un **intervallo di ottava** dalla precedente. Il nostro cervello la percepisce "uguale" ma più acuta.

[PIACEVOLI INTERVALLI]

Pitagora e i suoi, giocando col monocordo (anche in inglese *to play* vuol dire "giocare" ma anche "suonare"), scoprirono ben presto anche la regola "mistica" relativa alle **lunghezze** delle corde che, se in precisi rapporti tra esse, producono suoni "gradevoli":

Rapporto lunghezze	Rapporto pesi	Rapporto frequenze	Intervallo (consonante)
1 : 2	4 : 1	2 : 1	ottava
2 : 3	9 : 4	3 : 2	quinta
3 : 4	16 : 9	4 : 3	quarta

Ad esempio, prendendo due corde uguali ma lunghe una il triplo dell'altra, si producono suoni distanti una quinta ma in due ottave differenti:

$$\frac{\text{lunghezza 1}^a\text{ corda:}}{\text{lunghezza 2}^a\text{ corda:}}\quad \frac{3}{1} = \underbrace{\frac{2}{1}}_{\text{ottava}} \cdot \underbrace{\frac{3}{2}}_{\text{quinta}}$$

Un **intervallo**, più che una "distanza", è quindi il rapporto tra le frequenze delle note considerate.
Se questa proprietà funziona "allungando" le corde, funzionerà anche "accorciandole" ossia premendo una corda in un punto posto ad un preciso rapporto di distanza: ad esempio premendo la corda a metà della sua lunghezza e pizzicando una delle sue metà, otterremo una nota ad un'ottava superiore.

Se chiamiamo "*Do*" la nota di riferimento, quella cioè emessa dalla corda libera, la stessa corda
• dimezzata, suona il "*Do*" all'ottava superiore
• ridotta ai suoi 3/4, suona un "*Fa*" (quarta)
• ridotta ai suoi 2/3, suona un "*Sol*" (quinta)

Come ben rappresentato nel bellissimo cartoon "*Paperino nel mondo della Matemagica*" di Walt Disney (1959), già con queste quattro note è possibile costruire uno strumento a corda come la **lira** (si chiama così ancora oggi nell'epoca dell'Euro!).

[NOTE CON OBBLIGO DI FREQUENZA]

Facciamo ora qualche calcolo, il cui controllo è un semplice esercizio sulle operazioni tra frazioni.

Poniamo come unitaria la frequenza fondamentale di una corda, che dà inizio all'ottava di riferimento:

$$Do_1 = 1\ .$$

Moltiplicando per 3/2 si sale di una **quinta**:

$$Sol_1 = 3/2\ .$$

Dividendo per 3/2, si scende di una quinta, ottenendo una nota (Fa_0) nell'ottava precedente. La si può riportare nell'ottava di riferimento moltiplicandola per 2, ricavando così un intervallo di **quarta**:

$$Fa_0 = 2/3 \quad \xrightarrow{\times 2} \quad Fa_1 = 4/3\ .$$

Salendo di un'altra quinta a partire dal Sol_1, si ottiene un suono di frequenza maggiore di 2; per riportarlo all'ottava principale, lo dividiamo per 2:

$$Re_2 = 9/4 \quad \xrightarrow{:2} \quad Re_1 = 9/8\ .$$

La quinta a partire dal Re_1 è data da:

$$La_1 = 27/16$$

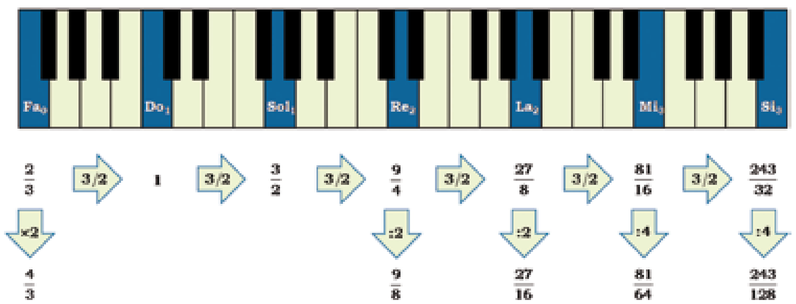
da cui si ottiene:

$$Mi_2 = 81/32 \quad \xrightarrow{:2} \quad Mi_1 = 81/64\ .$$

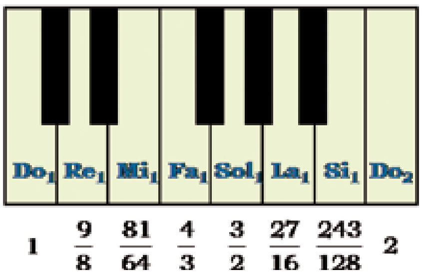
L'ultima nota della scala, entro l'ottava, è data da:

$$Si_1 = 243/128\ .$$

Riportiamo su una tastiera i nostri calcoli:



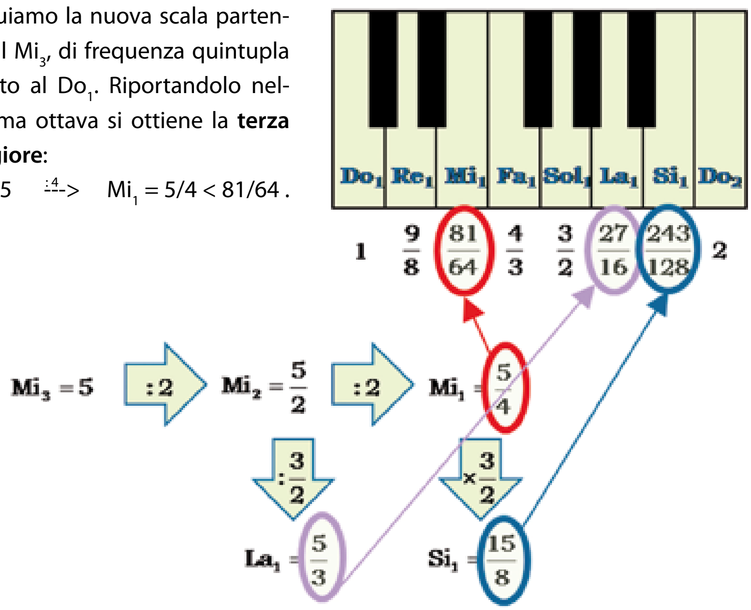
È così costruita la scala **diatonica pitagorica** (tasti bianchi), costituita da sette note primarie. Ci sono otto "gradini" dal Do_1 per arrivare al Do_2 di frequenza doppia. Ecco spiegato perché questo intervallo si chiama "ottava": si vuol significare la "distanza" fra le note e non il rapporto tra le loro frequenze (altrimenti la chiameremmo "doppia").



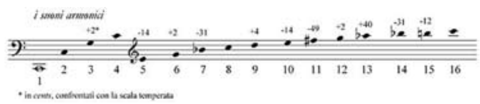
[ZARLINO, NATURALMENTE]

Il veneziano **Gioseffo Zarlino** nel 1558 propose di includere i rapporti 5/4 (terza maggiore) e 6/5 (terza minore) tra gli intervalli fondamentali della scala pitagorica, accanto a 2/1 (ottava), 3/2 (quinta) e 4/3 (quarta). Suggeriva cioè di usare anche i numeri 5 e 6, cosa improponibile ai pitagorici che, come detto, si fermavano al 4. Fu probabilmente per la loro influenza culturale che questa idea, avuta già da **Aristosseno** di Taranto nel IV sec. a.C., non ebbe successo e non fu tramandata.
La soluzione di Zarlino consisteva in un **temperamento** della scala, ossia nel ritoccare gli intervalli di terza e sesta per "accordarli" diversamente e semplificarli. Come sosteneva Pitagora e come ribadirà Galileo, è preferibile che i suoni stiano fra loro in rapporti "semplici", come frazioni tra numeri interi "piccoli": l'orecchio apprezzerà la regolarità del suono risultante e la consonanza degli intervalli.

Costruiamo la nuova scala partendo dal Mi_3, di frequenza quintupla rispetto al Do_1. Riportandolo nella prima ottava si ottiene la **terza maggiore**:
$Mi_3 = 5 \xrightarrow{:4} Mi_1 = 5/4 < 81/64$.



Una corda che vibra emette, assieme alla frequenza principale f_0 (la sua "nota"), altre frequenze secondarie dette **armonici naturali** o **ipertoni**, multipli interi di quella principale, ma di ampiezza (volume sonoro) sempre minore e pertanto non percepibili ad... orecchio nudo da un certo punto in poi.



Si tratta delle note di frequenza

$$f_n = nf_0 \qquad n \in N_0$$

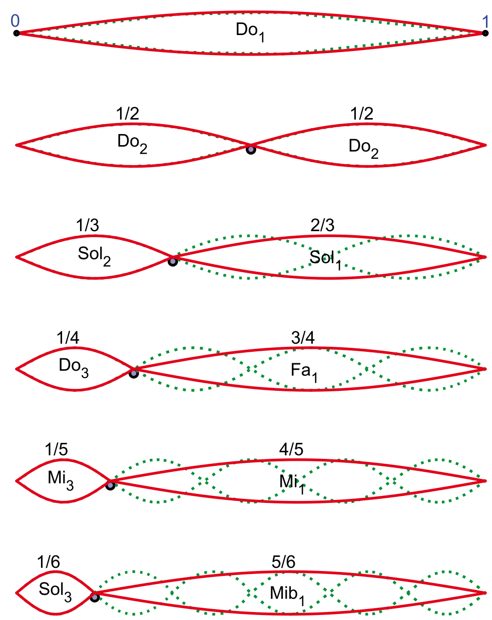
prodotte da 1/n di corda (frequenza e lunghezza sono inversamente proporzionali).
La successione

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

dei reciproci dei numeri naturali è detta, per tale motivo, **successione armonica**. Dividendo una corda lunga 1 in due parti pari a

$$\frac{1}{n} \quad e \quad \frac{n-1}{n} \qquad n \geq 2$$

otteniamo i seguenti suoni:



Le altre due note "ritoccate" si ottengono dal Mi_1 con una quinta discendente e una ascendente:

$$Mi_2 = 5/2 \xrightarrow{:3/2} La_1 = 5/3 < 27/16$$
$$Mi_1 = 5/4 \xrightarrow{x\,3/2} Si_1 = 15/8 < 243/128\ .$$

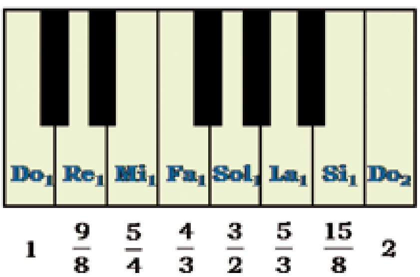
Il temperamento pitagorico è "naturale" poiché si basa, chissà quanto inconsapevolmente, proprio sugli armonici naturali, almeno fino al 4°.
Ad esempio $Sol_2 = 3$, ossia è il 3° armonico naturale del Do_1 riportato nella prima ottava, diventa $Sol_1 = 3/2$ come trovò Pitagora. Il temperamento di Zarlino è allora ancora "più naturale" visto che si ottiene direttamente anche il 5° armonico naturale:

$$Mi_1 = 5/4 \xrightarrow{x\,2} Mi_2 = 5/2 \xrightarrow{x\,2} Mi_3 = 5$$

che nella scala pitagorica risulta invece "stonato":

$$Sol_1 = 3/2 \xrightarrow{x\,3/2} Re_2 = 9/4 \xrightarrow{x\,3/2} La_2 = 27/8 \xrightarrow{x\,3/2} Mi_3 = 81/16 < 5\ .$$

Per tale possibilità, quella di Zarlino fu chiamata **scala naturale**. Essa risulta in effetti composta da suoni con rapporti "più semplici" della pitagorica.



Ecco la relazione tra nota e lunghezza della corda:

Nota	Lunghezza relativa della corda	Frequenza relativa della nota emessa
Do	1	1
Re	8/9	9/8
Mi	4/5	5/4
Fa	3/4	4/3
Sol	2/3	3/2
La	3/5	5/3
Si	8/15	15/8
Do_2	1/2	2

[PREGI NATURALI E DIFETTI INDOTTI]

Nonostante i pregi acustici, la scala naturale rende più difficile l'accordatura tra strumenti.
Mentre infatti la scala pitagorica contiene solo due tipi di intervalli tra note consecutive:

tono

$$\frac{Re_1}{Do_1} = \frac{Mi_1}{Re_1} = \frac{Sol_1}{Fa_1} = \frac{La_1}{Sol_1} = \frac{Si_1}{La_1} = \frac{9}{8}$$

semitono

$$\frac{Fa_1}{Mi_1} = \frac{Do_2}{Si_1} = \frac{256}{243}$$

nella scala naturale tali intervalli diventano tre:

tono maggiore

$$\frac{Re_1}{Do_1} = \frac{Sol_1}{Fa_1} = \frac{Si_1}{La_1} = \frac{9}{8}$$

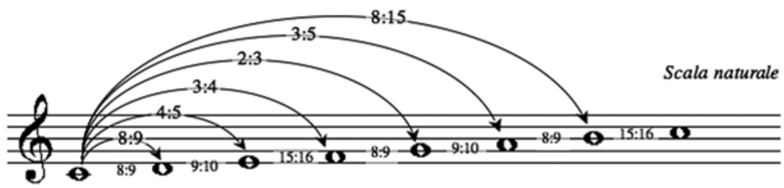
tono minore

$$\frac{Mi_1}{Re_1} = \frac{La_1}{Sol_1} = \frac{10}{9}$$

semitono

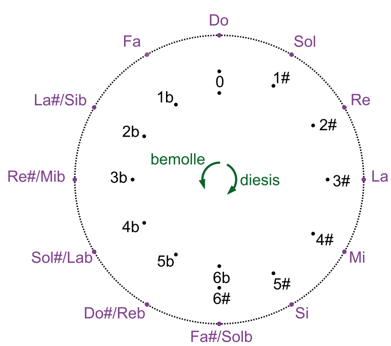
$$\frac{Fa_1}{Mi_1} = \frac{Do_2}{Si_1} = \frac{16}{15}$$

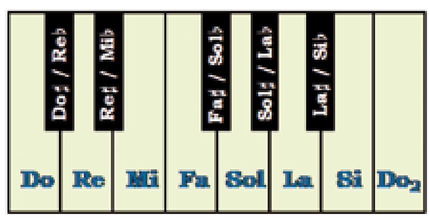
Zarlino non riuscì cioè ad eliminare un difetto noto della scala pitagorica: l'ottava non risulta divisa in parti *proporzionali*, ossia le "distanze" (i rapporti) tra note consecutive non sono costanti. Anzi, nella scala naturale divengono apprezzabilmente diverse, tanto da causare serie difficoltà agli accordatori.



[NOTE DI COLORE - SCALA CROMATICA]

Proseguendo con quinte successive, si trovarono note diverse fino ad ipotizzare scale naturali composte da 21 o addirittura 31 "gradini". Questo numero si stabilizzò nel Medioevo a 12 in modo che, alle sette note classiche, risultassero aggiunti altri cinque "gradini" intermedi (tasti neri), detti **note alterate**. Esse sono ottenute innalzando la nota precedente di un semitono (con il diesis #) o abbassando la successiva di un semitono (con il bemolle ♭), per un totale di 12 semitoni totali in cui risulta divisa l'ottava e quindi 12 note differenti nella scala.
Tale numero vien fuori dal cosiddetto "**ciclo delle quinte**" che, partendo ad esempio dalla quinta Fa-Do, va avanti per 12 volte fino a ritornare ad un Fa.
La scala così ottenuta è detta **scala cromatica**.





A fianco: Ciclo di quinte.

Aumentando il numero di note, la scala aumentava anche i suoi problemi che, in sintesi, erano tre:

1. *due semitoni non fanno un tono*
2. *a fine ciclo, le due note non sono le stesse*
3. *se la scala inizia da un'altra nota, risulta stonata*

1. Nella scala pitagorica, componendo due semitoni successivi non otteniamo un tono:

$$256/243 \cdot 256/243 < 9/8 \ .$$

Il rapporto tra i due valori è il **comma pitagorico**:

$$9/8 : (256/243)^2 = 3^{12}/2^{19} > 1 \ .$$

La cosa peggiora con i due toni della scala naturale:

$$15/16 \cdot 15/16 < \underbrace{9/10}_{\text{tono minore}} < \underbrace{9/8}_{\text{tono maggiore}} \ .$$

2. La nota ottenuta alla fine del *ciclo delle quinte* è "stonata" rispetto all'originale. Ad esempio, se partiamo dal Do_1 con frequenza 1, dopo 12 quinte otteniamo:

$$Do_8 = (3/2)^{12} = 531441/4096 \ .$$

Riportando la nota nella prima ottava, ossia trasponendolo all'indietro di 6 ottave, si ha

$$Do_8/2^6 = 3^{12}/2^{18} = 531441/262144 > 2 = Do_2 \ .$$

Il rapporto tra i due valori, quello effettivo e quello aspettato, è sempre il comma pitagorico:

$$Do_8/Do_2 = 3^{12}/2^{19} > 1 \ .$$

Per come sono ottenuti, anche:

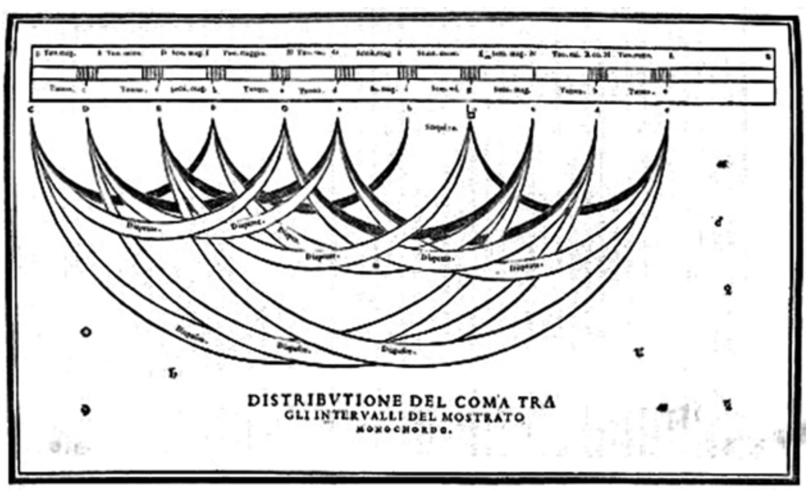
$$Do\#/Re\flat = 3^{12}/2^{19}$$

infatti

$$Do_1 \xrightarrow{+7 \text{ quinte}} Do\#_5 = (3/2)^7 \xrightarrow{-4 \text{ ottave}} Do\#_1 = 3^7/2^{11}$$
$$Do_1 \xrightarrow{-5 \text{ quinte}} Re\flat_{-2} = (2/3)^5 \xrightarrow{+3 \text{ ottave}} Re\flat_1 = 3^7/2^{11} \ .$$

Più che di "ciclo" si tratta quindi di una "**spirale di quinte**" poiché dopo 12 applicazioni, non si chiude affatto: 7 ottave sono infatti un po' più di 12 quinte

$$(3/2)^{12} \cdot (1/2)^7 > 1 \ .$$



Sopra: Immagine tratta dalle "Istitutioni Harmoniche" di G. Zarlino, pubblicato nel 1558..

Non è un problema del 12: infatti non si ottiene una potenza di 2 per alcuna coppia di n e m interi tali che

$$(3/2)^n = 2^m \ .$$

Tale possibilità equivale a che

$$3^n = 2^{m+n} \ .$$

ma nessun numero può essere contemporaneamente potenza intera di 3 (quindi dispari) e di 2 (pari). Estraendo la radice n-ma, si ha infatti

$$3 = 2^{m+1} \ .$$

ma 3 non è certo una potenza intera di 2.

3. Per chiudere il ciclo delle quinte occorre "temperare" meglio la scala, ossia ritoccare le frequenze in modo che il rapporto tra due note consecutive (semitono) sia costante. Ciò permette di iniziare la scala da qualunque nota o, come si dice in musica, usando la *modulazione* per variare la *tonalità*.
In altre parole, il temperamento cercato è tale che:

$$Do_8/Do_2 = 2^7 \ .$$

Questa costante, ossia il semitono "ottimale", fu calcolato esattamente circa 150 anni dopo Zarlino. Come nei migliori *serial*, ne riparleremo nella prossima puntata e nel prossimo insieme numerico.

[RIFLESSIONE FINALE]

Pitagora era in fondo un immigrato, che un giorno si stabilì in una città del nostro Sud. Se non avesse potuto esercitare la sua professione di filosofo, mistico, fisico, matematico, musicista ecc. tra l'altro nella zona oggi più povera d'Italia, quanto la nostra cultura oggi avrebbe perso di... razionalità? ////////////////////// :)

[BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA]

• A. Frova, *Fisica nella Musica*, Zanichelli
• P. Odifreddi, *Penna, pennello e bacchetta*, GLF Laterza, 2005
• M. Degiovanni et al., *Matematica per la vita*, Fond. A. e G. Boroli
• P. Italia, *Musica e Matematica*, in Nuova Umanità XXVI (2004/2) 152
• W. Maraschini, *Sette note e infiniti numeri*, su www.treccani.it
• FOR – Laboratorio di Matematica e Musica su http://for.indire.it
• portale Musica su www.wikipedia.org