

di Antonio Marino
e Claudio Saccon

Antonio Marino è professore ordinario di Analisi matematica presso l'Università di Pisa.

Si occupa di Analisi non lineare e di Calcolo delle variazioni non lineare per lo studio delle equazioni differenziali.

Ha collaborato con Ennio De Giorgi allo studio delle curve di massima pendenza.

Claudio Saccon è professore associato di Analisi matematica presso il Dipartimento di Matematica Applicata dell'Università di Pisa.

La sua attività di ricerca verte sui metodi topologici nello studio delle equazioni differenziali non lineari, sul Calcolo delle variazioni non lineare e sulle equazioni di evoluzione.

1. Introduzione

L'introduzione del calcolo differenziale classico negli spazi di funzioni, allo scopo di impostare e risolvere le equazioni funzionali, si può dire abbia avuto inizio, almeno in forma implicita, intorno agli anni Venti ad opera di G. D. Birkhoff, O. D. Kellog, J. Schauder, R. Caccioppoli e J. Leray. In questo indirizzo di studi furono ottenuti numerosi e brillanti risultati nei più diversi campi dell'Analisi matematica, in particolare grazie all'estensione agli spazi funzionali di metodi raffinati e potenti di analisi non lineare, quali la teoria del grado, la teoria di Morse eccetera.

Sono però numerosi i problemi, anche classici, che non possono essere ben inquadrati o ben affrontati con una trasposizione diretta negli spazi funzionali della consueta analisi differenziale.

Un esempio tipico e classico è l'equazione del calore

$$\begin{cases} \frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x_i^2} + h(x) & \text{su } \Omega \\ U(\cdot, t) = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove Ω è un sottoinsieme aperto, limitato e regolare di \mathbf{R}^N e h è un'assegnata funzione su Ω . Questa equazione, che pure può essere risolta con varie tecniche, ammette un interessante approccio variazionale: la curva $t \rightarrow U(\cdot, t)$ è quella lungo la quale il funzionale

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_i \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right)^2 dx - \int_{\Omega} h(x) dx$$

decrese il più rapidamente possibile, per esempio nello spazio $W_0^{1,2}(\Omega)$, rispetto alla metrica di $L^2(\Omega)$:

$$(Ev) \quad U'(t) = -\text{grad}_{L^2} E(U).$$

D'altra parte il funzionale E non è differenziabile in senso classico e nemmeno continuo rispetto alla metrica di $L^2(\Omega)$ (su un qualunque aperto A si ha $\sup E(A) = +\infty$); dunque l'equazione (Ev) ha bisogno di una opportuna interpretazione.

Ci sentiamo di affermare che questo punto di vista, che è quello "filosoficamente" più suggestivo, è proprio quello che permette di affrontare numerosi problemi di questo tipo, che non sono stati risolti con tecniche classiche.

Mettiamo del resto in evidenza che è stato necessario arricchire la stessa analisi lineare, quando la si è voluta trasportare negli spazi di funzioni per affrontare problemi legati alle equazioni funzionali. E nel campo non lineare la stessa nozione di convergenza di funzioni è stata drasticamente modificata (ad esempio con la Γ e la G convergenza di De Giorgi) per essere adeguata alle successioni di equazioni funzionali.

Un primo passo al di fuori dell'analisi differenziale classica è stata la teoria delle funzioni convesse e degli operatori massimali monotoni (e loro opportune perturbazioni), che ha permesso di affrontare numerosi problemi differenziali. Con la nozione, proposta da Ennio De Giorgi alla fine degli anni Settanta, di curva di massima

pendenza e con i seguenti studi, di cui egli è stato guida e sostegno intellettuale e umano, è stato fatto un altro passo avanti in questa direzione, che ha portato un po' più lontano dall'ipotesi di convessità.

Questa perdita di convessità consente anche di recuperare, nel contesto di questi problemi in cui mancano le classiche condizioni di regolarità, quei metodi topologici, promossi e sviluppati in Italia da G. Prodi e dalla sua scuola, con cui è possibile ottenere una molteplicità di soluzioni per equazioni di tipo stazionario.

Le ricerche che hanno avuto origine da quelle idee sono state rivolte a vari tipi di problemi, stazionari e di evoluzione, in presenza di vincoli o di irregolarità sui dati: equazioni del tipo di quella del calore in condizioni di irregolarità o con ostacoli non convessi (vedi [10, 14, 4]), molteplicità di soluzioni per disequazioni variazionali di tipo ellittico (vedi [11, 15]), autovalori, biforcazione per membrane (vedi [5, 8]) e per piastre in presenza di un ostacolo (vedi [9]), geodetiche rispetto a un ostacolo (vedi [13, 16, 17]) e rimbalzi (vedi [7]).

Nei primi cinque paragrafi richiamiamo le nozioni di pendenza e curva di massima pendenza e due teoremi astratti. Nei successivi illustriamo, a titolo di esempio, due problemi che si possono enunciare in modo elementare: le geodetiche rispetto a un ostacolo e i rimbalzi.

Siamo particolarmente lieti di scrivere di queste cose su una rivista di più ampio respiro rispetto alle consuete pubblicazioni scientifiche specializzate. Speriamo di essere riusciti a porgere qualcuna delle idee portanti proposte da De Giorgi e sviluppate con i suoi numerosi collaboratori. Quella esperienza, per quanti hanno avuto la for-

tuna di viverla, è stata un'affascinante avventura scientifica e umana che è rimasta nella mente e nel cuore.

2. La pendenza e le curve di massima pendenza negli spazi metrici

Le prime definizioni e primi risultati astratti furono proposti nel lavoro [6]. La nozione di curva di massima pendenza che esponiamo ora corrisponde a quella che in quel lavoro è detta curva di massima pendenza in media.

Considereremo nel seguito un insieme W e una funzione $f: W \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

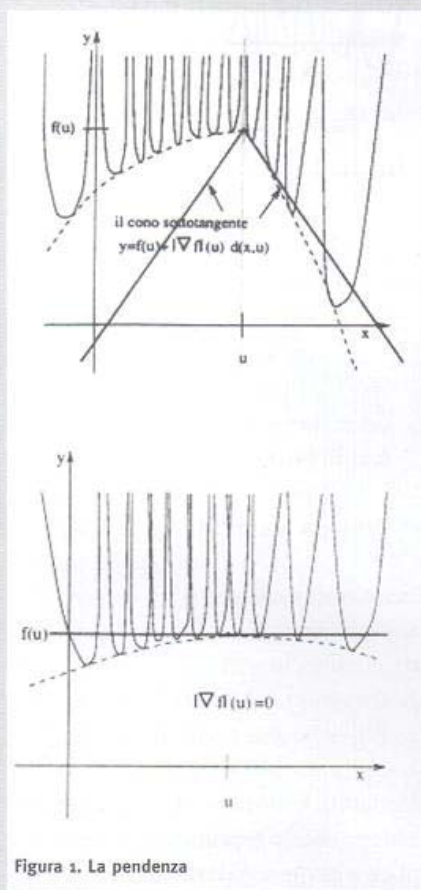


Figura 1. La pendenza

Indicheremo con $D(f)$ l'insieme $\{u \in W \mid f(u) < +\infty\}$.

Supponiamo che W sia uno spazio

metrico e indichiamo con d la sua metrica.

2.1. Definizione

Se $u \in D(f)$, diciamo pendenza (discendente) di f in u il numero (vedi Figura 1)

$$|\nabla f|(u) = \begin{cases} \limsup_{v \rightarrow u} \frac{[f(v) - f(u)]^+}{d(u, v)} & \text{se } u \text{ non è isolato} \\ 0 & \text{se } u \text{ è isolato} \end{cases}$$

Diciamo che u è inferiormente stazionario per f se $|\nabla f|(u) = 0$.

2.2. Definizione

Sia I un intervallo non ridotto a un singolo punto. Una curva $\mathcal{U}: I \rightarrow W$ è detta curva di massima pendenza per f se per ogni t_1, t_2 in I con $t_1 \leq t_2$ risulta

$$d(\mathcal{U}(t_2), \mathcal{U}(t_1)) \leq \int_{t_1}^{t_2} |\nabla f|(\mathcal{U}(t)) dt$$

$$f(\mathcal{U}(t_2)) - f(\mathcal{U}(t_1)) \leq \int_{t_1}^{t_2} |\nabla f|(\mathcal{U}(t))^2 dt$$

Si verifica facilmente che, nel caso in cui W sia una varietà riemanniana

- $|\nabla f|(u) = \|\text{grad}_W f(u)\|$;
- $\mathcal{U}: I \rightarrow W$ è una curva di massima pendenza per f se e solo se $\mathcal{U}'(t) = -\text{grad}_W f(\mathcal{U}(t)) \quad \forall t \text{ in } I$.

Vari teoremi di esistenza di curve di massima pendenza sono stati provati in [12] per certe classi di funzioni. Non ci soffermiamo su questi preferendo invece richiamare un teorema di esistenza che assicura anche l'unicità per una classe di funzioni definite in uno spazio vettoriale (di Hilbert).

3. Il caso degli spazi di Hilbert

Un ambiente nel quale si possono dare delle nozioni più vicine a quelle classi-

che è costituito dagli spazi di Hilbert. Supponiamo dunque che l'insieme W su cui f è definita sia un sottoinsieme di uno spazio di Hilbert H . Se u e v appartengono a H , indicheremo con $\langle u, v \rangle$ il prodotto scalare tra u e v e con $\|u\|$ la corrispondente norma di u .

3.1. Definizione

Se $u \in D(f)$, diciamo sottodifferenziale di f in u l'insieme $\partial^- f(u)$ (eventualmente vuoto) di tutti gli α in H tali che

$$\liminf_{v \rightarrow u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{\|v - u\|} \geq 0$$

nel caso in cui u non sia isolato in W ; se u è isolato poniamo $\partial^- f(u) = H$ (vedi figure 2 e 3).

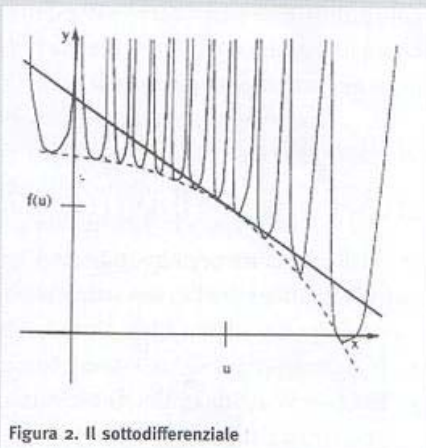


Figura 2. Il sottodifferenziale

È facile vedere che $\partial^- f(u)$ è un sottoinsieme chiuso e convesso di H .

Se $\partial^- f(u) \neq \emptyset$, indicheremo con $\text{grad}^- f(u)$ l'elemento di minima norma in $\partial^- f(u)$.

3.2. Osservazione

Valgono i fatti seguenti.

1. Se u è interno a W ed f è differenziabile in u , allora è evidente che $\partial^- f(u) = \{\text{grad} f(u)\}$.

2. Se f è convessa, allora $\partial^- f(u)$ coincide con il classico sottodifferenziale

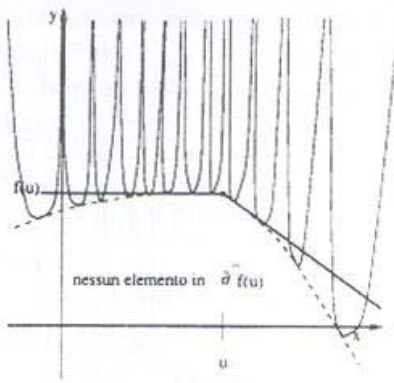
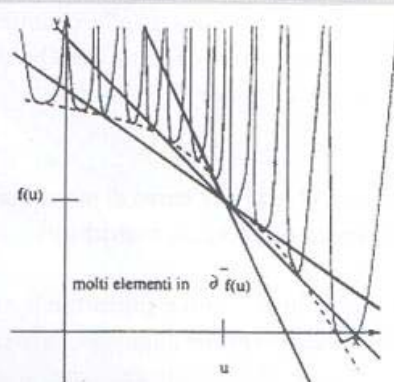


Figura 3. Il sottodifferenziale - vari casi

$\partial f(u)$, definito per le funzioni convesse, perché si può verificare che $\alpha \in \partial^- f(u)$ se e solo se

$$f(v) \geq f(u) + \langle \alpha, v - u \rangle$$

per ogni $\forall u$ in W

3.3. Osservazione

Supponiamo che u appartenga a $D(f)$; è evidente che:

1. se $\alpha \in \partial^- f(u)$, allora $|\nabla f|(u) \leq \|\alpha\|$;
2. $|\nabla f|(u) = 0$ se e solo se $0 \in \partial^- f(u)$.

Mediante la nozione di sottodifferenziale possiamo esprimere in modo semplice le proprietà delle curve di massima pendenza.

3.4. Proposizione

Sia I un intervallo non ridotto a un sin-

golo punto e sia $\mathcal{U}: I \rightarrow W$.

I seguenti fatti sono equivalenti.

1. \mathcal{U} è assolutamente continua, $f \circ \mathcal{U}$ è decrescente e

$$-\mathcal{U}'(t) \in \partial^- f(\mathcal{U}(t))$$

per quasi ogni t in I .

2. \mathcal{U} è una curva di massima pendenza per f e per quasi ogni t vale la relazione

$$\partial^- f(\mathcal{U}(t)) \neq \emptyset \text{ e } |\nabla f|(\mathcal{U}(t)) = \text{grad}^- f(\mathcal{U}(t)).$$

In questo caso per quasi ogni t risulta

$$\mathcal{U}'(t) = -\text{grad}^- f(\mathcal{U}(t)).$$

4. Un punto di vista sui vincoli

Notiamo che in tutte le definizioni precedenti non gioca alcun ruolo l'insieme dei punti u in cui $f(u) = +\infty$; le nozioni viste non cambiano se si considera f definita soltanto su $D(f)$.

Supponiamo che M sia una sottovarietà differenziabile di uno spazio di Hilbert H ; se f è definita in un sottoinsieme aperto W di H ed è differenziabile in un punto u di $W \cap M$, definita f^* ponendo $f^*(u) = f(u)$, se u appartiene a M e $f^*(u) = +\infty$ per u fuori M , si può verificare che

$$|\nabla f^*|(u) = |\nabla f|_M(u) = \|\text{grad}_M f(u)\|.$$

Si può inoltre dimostrare facilmente che

$$\text{grad}^- f(u) = \text{grad}_M f(u)$$

anzi

$$(1) \quad \partial^- f^*(u) = \{\text{grad} f(u) + v \mid v \text{ è ortogonale a } M \text{ in } u\}.$$

Questo ci induce a impostare i problemi vincolati nel modo seguente.

Se E è un sottoinsieme di W poniamo

$$I_E(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \in E \\ +\infty & \text{se } u \in W \setminus E. \end{cases}$$

Allora lo studio della funzione ristretta al vincolo E sarà ricondotto allo studio della funzione $f + I_M$, che è definita su tutto W . Possiamo ora notare che la formula (1) significa che, in quelle ipotesi di regolarità

$$(2) \quad \partial^-(f + I_M)(u) = \partial^- f(u) + \partial^- I_M(u)$$

perché, come si prova facilmente, $\partial^- f(u)$ è l'insieme delle normali a M in u . Se f ed M non sono regolari, la (2) è falsa in generale. È molto importante allora il fatto che, in certe ipotesi, la relazione (2) sia ancora vera (vedi ad esempio i teoremi in [5, 4]).

5. Le funzioni Φ -convesse

È importante individuare classi di funzioni in cui sia possibile costruire una analisi fondata sulle precedenti definizioni, in modo utile allo studio delle equazioni differenziali. Sono ben noti, ad esempio, alcuni classici teoremi di esistenza per le curve di evoluzione nel caso delle funzioni convesse semicontinue o di loro opportune perturbazioni di classe $C^{1,1}$ (vedi [1]). Vogliamo qui esporre alcuni risultati riguardanti una classe di funzioni con "difetto di convessità".

Supponiamo ancora che l'insieme W in cui f è definita sia un sottoinsieme di uno spazio di Hilbert H .

5.1. Definizione

Diciamo che f è Φ -convessa se esiste una funzione continua

$$\varphi: D(f)^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$f(v) \geq f(u) + \langle \alpha, v - u \rangle + \\ -\varphi(u, v, f(u), f(v), \|\alpha\|) \|v - u\|^2 \\ \forall u, v \in D(f) \quad \forall \alpha \in \partial^- f(u)$$

Si noti che se per un certo u in $D(f)$, $\partial^- f(u) = \emptyset$, non imponiamo nessuna condizione esplicita al comportamento di f in u .

Diciamo che f è Φ -convessa di ordine r se

$$\varphi(u, v, f(u), f(v), \|\alpha\|) = \\ = \varphi_0(u, v, f(u), f(v)) (1 + \|\alpha\|^r),$$

per un'opportuna funzione continua φ_0 .

Per esempio si vede che se $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione convessa semicontinua inferiormente e se M è una sottovarietà di H di classe $C^{1,1}$, allora $f + I_M$ è Φ -convessa di ordine 1.

Nel seguito del paragrafo considereremo le ipotesi

(f) W è localmente chiuso; f è Φ -convessa e semicontinua inferiormente.

5.2. Osservazione

Supponiamo che valgano le (f). Allora per ogni u in $D(f)$

$$|\nabla f|(u) < +\infty \Leftrightarrow \\ \partial^- f(u) \neq \emptyset \text{ e } \|\text{grad}^- f(u)\| = |\nabla f|(u)$$

5.3. Teorema

Valgano le ipotesi (f) e sia u_0 in $D(f)$. Allora:

1. se $\partial^- f(u_0) \neq \emptyset$, esiste un'unica $\mathcal{U}: [0, T] \rightarrow W$ ($T > 0$) di massima pendenza per f , con $\mathcal{U}(0) = u_0$; inoltre \mathcal{U} dipende con continuità da u_0 al variare di quest'ultimo in insiemi in cui f e il suo gradiente inferiore sono limitati;
2. se f è Φ -convessa di ordine 2 basta che u_0 sia in $D(f)$ perché \mathcal{U} dipenda con continuità da u_0 al variare di quest'ultimo in insiemi in cui f è limitata.

Tra i vari teoremi riguardanti i vincoli

mettiamo in evidenza il seguente enunciato che ci sembra semplice ed espressivo (vedi [5]). Premettiamo una definizione.

5.4. Definizione

Se A e B sono due sottoinsiemi di H , diciamo che A e B sono tangenti in un punto u di $A \cap B$, se

$$\partial^- I_A(u) + (-\partial^- I_B(u)) \neq \{0\}$$

5.5 Teorema

Valgano le ipotesi (f) e f sia Φ -convessa di ordine 1.

Sia inoltre M una sottovarietà di H di codimensione finita (eventualmente con bordo), di classe $C_{loc}^{1,1}$. Se M e $D(f)$ non sono tangenti in alcun punto della loro intersezione allora:

- $f + I_M$ è Φ -convessa di ordine 1;
- per ogni u di $D(f)$ risulta $\partial^-(f + I_M)(u) = \partial^- f(u) + \partial^- I_M(u)$.

6. Le geodetiche rispetto a un ostacolo

Ora, tra i diversi risultati riguardanti le equazioni differenziali che è stato possibile ottenere mediante le nozioni sopra richiamate (o loro generalizzazioni) in questo e nel prossimo paragrafo ci limitiamo a presentarne due, che possono essere enunciati in modo del tutto elementare e che sono collegati tra loro. Essi riguardano funzioni di una variabile e possono essere compresi da qualunque studente che abbia seguito i primi corsi di Analisi e Geometria.

Uno dei più brillanti risultati dell'Analisi non lineare negli spazi di funzioni riguarda lo studio delle geodetiche sulle varietà regolari. In esso si rivela in

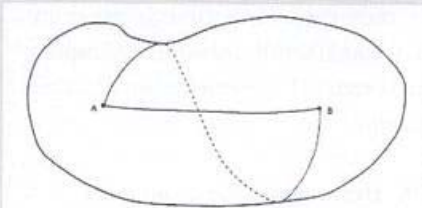


Figura 4. Alcune geodetiche su M

modo particolarmente spettacolare l'efficacia dei metodi topologici per lo studio delle equazioni differenziali. Il seguente enunciato è dovuto ai convergenti studi di Morse, Serre, Schwartz e altri.

6.1. Teorema

Sia M una varietà riemanniana regolare, compatta e priva di bordo. Siano A e B due punti di M .

Allora esistono infinite geodetiche su M che congiungono A e B .

Si noti che nel caso in cui M sia una sottovarietà di \mathbb{R}^N , una curva

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$$

è una geodetica su M se, per ogni t in $[a, b]$, $\gamma(t) \in M$, $\dot{\gamma}$ è ortogonale a M in $\gamma(t)$. (vedi Figura 4).

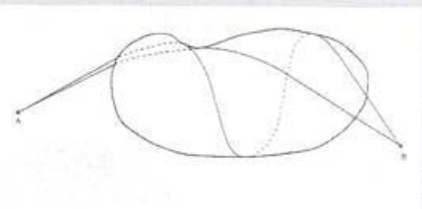


Figura 5. Alcune geodetiche rispetto all'ostacolo C

Ebbene è sufficiente che nel precedente problema si voglia considerare il caso di una varietà M dotata di bordo per uscire completamente dall'ambito del calcolo differenziale classico. Tuttavia il problema può essere affrontato in modo concettualmente semplice mediante le nozioni espresse poco sopra

(vedi [13]).

Per illustrare questo approccio consideriamo il caso in cui M sia $\mathbb{R}^N \setminus C$, dove C è un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{R}^N , aperto, limitato e regolare. Se $x \in \partial C$ indichiamo con $v(x)$ il vettore normale entrante a ∂C in x .

6.2. Definizione

Diciamo che una curva $\gamma(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una geodetica rispetto all'ostacolo C (ovvero in $\mathbb{R}^N \setminus C$), se γ e $\dot{\gamma}$ sono assolutamente continue e

- $\gamma(t)$ appartiene a $\mathbb{R}^N \setminus C$ per ogni t in $[a, b]$,
- $\dot{\gamma} = 0$ per ogni t in cui $\gamma(t) \in \partial C$,
- $\dot{\gamma}$ è parallela e concorde a $v(\gamma(t))$ per quasi tutti i t per cui $\gamma(t) \in \partial C$

(vedi Figura 5).

Dati A e B in $\mathbb{R}^N \setminus C$ ci chiediamo ora quante siano le geodetiche rispetto all'ostacolo C , che congiungono A e B . Con le nozioni precedenti anche questo problema è di tipo variazionale. Consideriamo infatti:

- lo spazio H delle curve assolutamente continue $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$
- il vincolo V definito da $V = \{\gamma \in H \mid \gamma(a) = A, \gamma(b) = B, \gamma(t) \notin C \text{ per ogni } t\}$
- il funzionale $f: H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definito da

$$f(\gamma) = \begin{cases} \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|^2 dt & \text{se } \gamma \in V, \\ +\infty & \text{se } \gamma \notin V \end{cases}$$

Risulta che:

- (3) γ è una geodetica \Leftrightarrow
 γ è un punto inferiormente stazionario per f .

Si può allora dimostrare il seguente teorema (vedi [13]).

6.3. Teorema

Esistono infinite geodetiche rispetto all'ostacolo C che congiungono A e B .

Infatti risulta che f è un funzionale Φ -convesso di ordine 2 e che il vincolo V ha una struttura topologica così complessa che ogni funzione Φ -convessa di ordine 2 che abbia V come dominio ha infiniti punti stazionari (in certe ipotesi standard).

Esistono varie e interessanti generalizzazioni del teorema 6.3, vedi ad esempio [16, 17].

7. Il problema dei rimbalzi

Un problema collegato con il precedente, ma in larga misura aperto è quello delle traiettorie di rimbalzo. Ci sembra naturale farne un cenno in questa sede anche perché si tratta di un problema che può essere esposto in termini elementari. Fra i numerosi studi sull'argomento citiamo in particolare [2, 3, 7]. Consideriamo un "biliardo" individuato da un sottoinsieme aperto e regolare Ω di \mathbb{R}^N ; se $x \in \partial\Omega$, denotiamo con $v(x)$ il vettore normale uscente a $\partial\Omega$ in x . Consideriamo inoltre un'energia potenziale $U: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 . Seguendo [2] adottiamo la seguente

7.1. Definizione

Una curva assolutamente continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è detta traiettoria di rimbalzo in $\bar{\Omega}$ se:

1. $\gamma(t)$ appartiene a $\bar{\Omega}$ per ogni t in $[a, b]$;
2. esiste una misura positiva μ su $[a, b]$ con supporto contenuto nell'insieme degli istanti di contatto

$$\{t \in [a, b] \mid \gamma(t) \in \partial\Omega\}$$

tale che

$$\dot{\gamma}(t) + \text{grad } U(t) + \mu v(\gamma(t)) = 0;$$

3. l'energia totale

$$\frac{1}{2} \dot{\gamma}(t)^2 + U(\gamma(t))$$

è costante in $[a, b]$.

Si noti che nella definizione precedente, la 3) non è conseguenza delle 1) e 2) a causa della presenza della misura μ concentrata negli istanti di contatto con $\partial\Omega$: se non ci fosse la 3) la μ potrebbe rappresentare, per esempio, una "martellata" inferta alla biglia nell'istante di contatto, e potrebbe anche modificare l'energia totale.

In [2, 3] ci si occupa in particolare della esistenza di traiettorie di rimbalzo che partano da un assegnato punto di Ω , con velocità assegnata. Noi vogliamo invece occuparci dell'esistenza e del numero di traiettorie di rimbalzo che congiungono due assegnati punti A e B di Ω . La prima difficoltà che si incontra consiste nel fatto che non è per nulla chiaro se esista e quale sia un funzionale f , definito in uno spazio di curve, i cui punti stazionari, in qualche senso, siano le traiettorie di rimbalzo cercate.

Cominciamo con il mettere in evidenza che nel caso in cui Ω sia convesso è possibile dare al problema una suggestiva impostazione variazionale. Questa è suggerita dal fatto che, se Ω è convesso, le traiettorie di rimbalzo tra due suoi punti possono essere pensate, ad esempio nel caso in cui sia $U=0$,

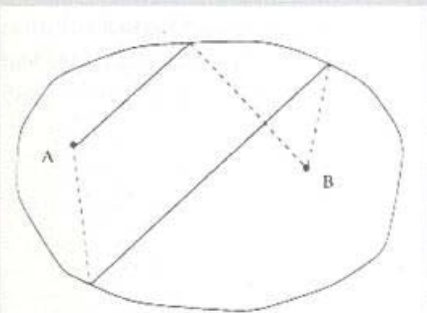


Figura 6. I rimbalzi in un convesso

come le posizioni di equilibrio assunte da un elastico teso tra A e B e "avvolto" a una piastra priva di attrito che

abbia la forma di Ω . Possiamo precisare questa idea intuitiva introducendo la "varietà a due facce" Ω^* come segue.

7.2. Definizione

Siano $\Omega^* = \Omega \cup \partial\Omega$ due copie di Ω ; indichiamo con Ω^* l'unione di Ω^+ , Ω^- e $\partial\Omega$. Denotiamo con π la proiezione naturale di Ω^* in \mathbb{R}^N . Introduciamo la distanza $d^*(P, Q)$ tra due punti P e Q di Ω^* , ponendo

$$d^*(P, Q) = \inf \left\{ \left| \pi(P) - C \right| + \left| \pi(Q) - C \right| \mid C \in \partial\Omega \right\}$$

se $P \in \Omega^+ \cup \partial\Omega$, $Q \in \Omega^- \cup \partial\Omega$ o viceversa, e $d^*(P, Q) = \left| \pi(P) - \pi(Q) \right|$ altrimenti.

A questo punto, fissati A e B in Ω è spontaneo considerare lo spazio V delle curve continue $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega^*$ tali che $\pi \circ \gamma$ sia assolutamente continua e $\gamma(a) = A^+ \circ A^-$, $\gamma(b) = B^+ \circ B^-$ (A^+ e B^+ sono le controimmagini in Ω^+ di A e B tramite π , A^- e B^- quelle in Ω^-), e il funzionale $f: V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definito da

$$f(\gamma) = \int_a^b \left(\frac{1}{2} \left| \frac{d}{dt} \pi(\gamma(t)) \right|^2 - U(\gamma(t)) \right) dt$$

per γ in V .

Consideriamo ad esempio in V la seguente metrica: per γ_1 e γ_2 in V si pone

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \int_a^b d^*(\gamma_1(t), \gamma_2(t))^2 dt$$

A questo punto è intuitivo che se γ è punto inferiormente stazionario per f su V con la metrica considerata, allora γ è traiettoria di rimbalzo.

Il lavoro [7] è partito proprio da questa idea, ma per rendere più agevoli i calcoli si è fatto ricorso a un procedimento di approssimazione di Ω^* me-

diante dei suoi "rigonfiamenti lenticolari". In quel lavoro si dimostra così il seguente teorema:

7.3. Teorema

Se Ω è un sottoinsieme aperto convesso e regolare di \mathbb{R}^N , se $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^2 , se A e B sono due punti di Ω , allora esistono infinite traiettorie di rimbalzo in $\overline{\Omega}$ che congiungono A e B .

Il caso in cui Ω non è convesso resta sostanzialmente aperto. Infatti da un lato, come già accennato prima, non è chiaro quali siano lo spazio di curve e il funzionale che permettono un approccio variazionale al problema.

D'altra parte non è nemmeno chiaro in quali ipotesi esistano molte o addirittura infinite traiettorie di rimbalzo tra due punti assegnati in $\overline{\Omega}$. Infatti è ben noto l'esempio in cui Ω ha forma di fungo, illustrata in Figura 7. Se la testa del fungo ha la parte superiore di forma ellittica e il gambo si inserisce esattamente nei fuochi, allora non esiste nessuna traiettoria di rimbalzo che parta da un punto del gambo e giunga in un punto della zona tratteggiata.

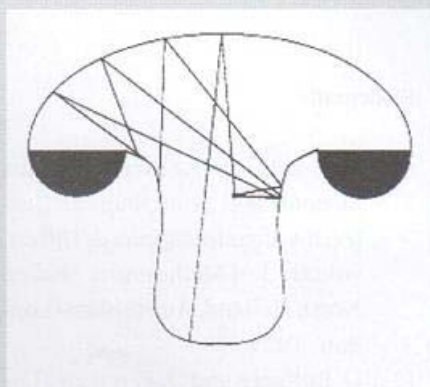


Figura 7. I rimbalzi nel "fungo"

7.4. Congettura

Se A e B sono due punti di Ω consideriamo lo spazio V_f delle curve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$

assolutamente continue e tali che $\gamma(a) = A, \gamma(b) = B, \gamma(t) \in \overline{\Omega}$ per ogni t e

$$(*) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\dot{\gamma}(t)|^2 + U(\gamma(t)) \right) = 0 \\ \forall t \text{ in } [a, b].$$

con la metrica di $L^2(a, b; \mathbf{R}^N)$ e il funzionale $f_1 : V_1 \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ definito da

$$f_1(\gamma) = - \int_a^b \left(\frac{1}{2} |\dot{\gamma}(t)|^2 - U(\gamma(t)) \right) dt$$

È naturale chiedersi se le γ di V_1 che siano punti inferiormente stazionari per f_1 su V_1 siano traiettorie di rimbalzo. Si noti che se si toglie la condizione (*), si ottengono curve con le sole proprietà 1) e 2) della definizione 7.1. Si noti ancora che se si considera invece del funzionale f_1 il suo opposto $-f_1$, si ottengono, come visto nel paragrafo 5, le "geodetiche in presenza del potenziale U ", tra A e B , rispetto all'ostacolo $\mathbf{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Ci chiediamo anche se, ad esempio nel caso in cui sia $U = 0$ e il segmento tra A e B sia interamente contenuto in Ω , esistono molte, diciamo più di due, traiettorie di rimbalzo tra A e B .

Bibliografia

- [1] H. Brézis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroups de Contraction dans les Espaces de Hilbert*, volume 5 of *Mathematics Studies*, North Holland, Amsterdam-London, 1973
- [2] G. Buttazzo and D. Percivale, The bounce problem on n-dimensional Riemannian manifolds. *Atti Accad. Naz. Lincei*, 70, pp. 246-250, 1981
- [3] M. Carriero, A. Leaci, and E. Pascali, Convergenza per l'equazione degli integrali primi associata al problema del rimbalzo elastico unidimensionale. *Ann. Mat. Pura Appl.*, CXXXIII(IV), pp. 227-256, 1983
- [4] G. Cöbanov, A. Marino, D. Scolozzi, Multiplicity of eigenvalues for the Laplace operator with respect to an obstacle and nontangency conditions. *Rend. Accad. Naz. delle Scienze detta dei XL*, XIV, pp. 139-142, 1990
- [5] G. Cöbanov, A. Marino, D. Scolozzi, Multiplicity of eigenvalues for the Laplace operator with respect to an obstacle and nontangency conditions, *Nonlinear Anal., Theory, Methods and Applications*, 15 (3), pp. 199-215, 1990
- [6] E. De Giorgi, A. Marino, M. Tosques, Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza, *Atti Accad. Naz. Lincei*, 68 (8), pp. 180-187, 1980
- [7] M. Degiovanni, Sul problema del rimbalzo in un insieme convesso, *Nonlinear Anal., Theory, Methods and Applications*, 9 (12), pp. 1401-1443, 1985
- [8] M. Degiovanni A. Marino, Nonsmooth variational bifurcation, *Atti Accad. Naz. Lincei*, 81(8) pp. 259-269, 1988
- [9] M. Degiovanni and A. Marino, Eigenvalue problems for Von Karman's equations with obstacle, in *Symmetry in Nature. A Volume in honour of Luigi A. Radicati di Brozolo*, pp. 287-299, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1989
- [10] M. Frigon and C. Saccon, Heat equations with discontinuous nonlinearities on convex and nonconvex constraints, *Nonlinear Anal., Theory, Methods and Applications*, 17 (10), pp. 923-946, 1991
- [11] A. Marino and D. Passaseo, A jumping behaviour induced by an obstacle, in M. Girardi, M. Matzeu, and F. Pacella, editors, *Progress in Variational Methods in Hamiltonian Systems and Elliptic Equations*, pp. 127-143, Pitman, 1992
- [12] A. Marino, C. Saccon, and M. Tosques, Curves of maximal slope and parabolic variational inequalities on nonconvex constraints, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, XVI, pp. 281-330, 1989
- [13] A. Marino and D. Scolozzi, Geodetiche con ostacolo. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 2 (6-B), pp. 1-31, 1983
- [14] C. Saccon, Some parabolic equations on nonconvex constraints, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 7 (3-B), pp. 369-386, 1989
- [15] C. Saccon. Nontrivial solutions for asymptotically linear variational inequalities, *Topological Meth. Nonlinear Anal.*, 7, pp. 187-203, 1996
- [16] D. Scolozzi, Esistenza e molteplicità di geodetiche con ostacolo con estremi variabili, *Ricerche di Matematica*, 33, pp. 171-201, 1984
- [17] D. Scolozzi, Un teorema di esistenza di una geodetica chiusa su varietà con bordo, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 6 (4-A), pp. 451-457, 1985.