La curva di Peano

Nel mese di gennaio del 1890 Peano pubblica sui *Mathematische Annalen* la nota *Sur une curve qui remplit toute une aire plane* dove, per la prima volta, compare una curva che passa per tutti i punti di un quadrato. In un momento in cui la Teoria degli insiemi stava cercando di affermarsi come fondamento per tutti i settori della Matematica (e sulla sua base si stavano affermando nuove discipline come ad esempio la Topologia) l'impressione è enorme. Per le tradizionali concezioni della Matematica, l'effetto è dirompente e contribuisce a riaccendere le dispute fra i sostenitori del formalismo e chi alle proprietà degli enti matematici richiede un certo grado di intuitività. *"Uno dei fatti più notevoli della Teoria degli insiemi"* sarà definito da Felix Hausdorff (1868-1942) qualche anno più tardi.
La costruzione di Peano è puramente analitica, priva di qualunque tentativo di rendere visibile la curva e la maniera con cui viene ottenuta, anche se le prime iterazioni della successione di curve di cui è limite si comprendono abbastanza facilmente (si veda la figura 2). Da lì a un anno, il celebre David Hilbert (1862-1943) proseguirà su questa strada, descrivendo in passi successivi analoghe *"curve che riempiono un'area"*, le quali rientrano oggi fra quegli oggetti familiari che sono noti come "frattali" e di cui quella di Peano rappresenta il primo esemplare.
Dopo questo risultato, è inevitabile che riparta la questione: ma che cos'è dunque una *curva?* La domanda non è banale. Ha impegnato i matematici per qualche millennio, a partire dalla definizione data (forse per primo) da Euclide: *"la curva è una lunghezza senza larghezza"* che, seppure in modo
non del tutto soddisfacente, fornisce la prima approssimazione utile per formalizzare la comprensione intuitiva. È noto poi che, nel periodo classico, la nozione di curva è legata ai metodi con cui viene generata – meccanismi, punte traccianti o scriventi, strumenti idonei a descriverla – e quindi non è vista come un ente autonomo ma come un "prodotto meccanico". Bisognerà attendere molti secoli per capire, grazie a Descartes ed alla Geometria analitica, che un'equazione in x e y non
solo rappresenta una curva piana ma permette di definirla: *"è l'insieme dei punti del piano che soddisfano un'equazione della forma F(x,y)=0"*.
Si tratta di un passo essenziale per liberare la nozione di curva dai metodi con cui è costruita e ricondurla allo studio della sua equazione. Ed è una definizione abbastanza generale. In qualche caso troppo generale, perché la funzione F può essere qualunque e non è difficile trovarne una che è soddisfatta da tutti i punti del piano oppure da nessuno: ad esempio

$$|x| + |x - 1| + |y| + |y - 1| - 2 = 0$$

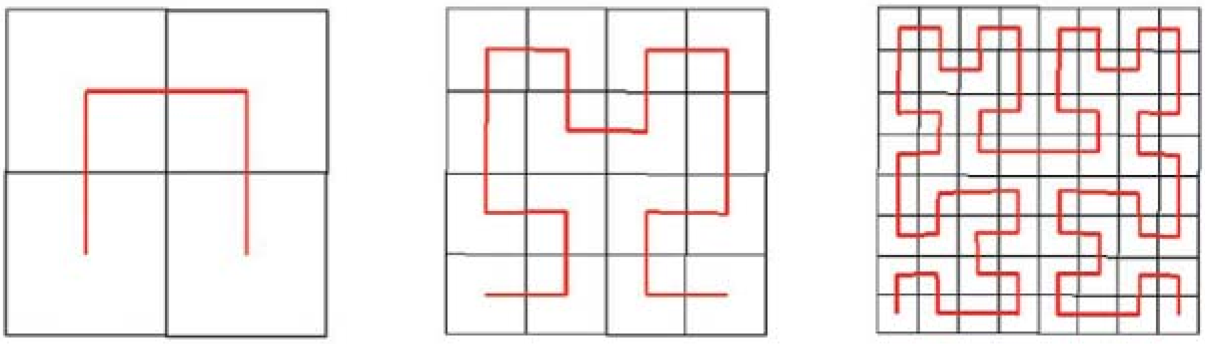
è soddisfatta da tutti e soli i punti del quadrato unitario

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

Nella seconda metà dell'800 il problema di cosa si debba intendere come *curva piana* comincia ad essere cruciale per i fondamenti della Matematica. Una risposta che sembra soddisfacente viene data dal matematico francese Camille Jordan (1838-1922), interessato a studiare le proprietà topologiche delle parti di piano limitate da curve chiuse. A questo scopo, Jordan formalizza la nozione intuitiva di traiettoria: *"una curva piana è l'insieme dei punti le cui coordinate x e y sono assegnate da due funzioni continue:*

$$x = \varphi(t)$$
$$x = \psi(t)$$

con t appartenente all'intervallo unitario [0,1]".



Le prime tre iterazioni della curva di Peano

È proprio a questo punto che arriva la definizione di Peano, a rovinare la festa a chi riteneva di aver finalmente una definizione accettabile di curva piana! Infatti la curva di Peano è data in forma parametrica – come vuole la definizione di Jordan – con funzioni continue, ma fornisce una applicazione *suriettiva* dell'intervallo [0,1] su tutto il quadrato unitario. Lo riempie completamente! Certamente non è una curva che si descrive in maniera semplice. Qualcuno lamenta che la sua esistenza, insieme ad analoghi risultati "patologici" di questo tipo che sorgono da più parti, sia la migliore evidenza del fatto che le direzioni assunte dalla nascente Teoria degli insiemi (e dall'*Analysis situs* o Topologia ad essa collegate), fuoriescono dall'ambito propriamente matematico. Ma è a pieno diritto una curva, che mostra, seppure infinitamente ripetuti, alcuni caratteri delle altre curve, come ad esempio la presenza di punti multipli o di autointersezione.
Questo è inevitabile: Georg Cantor (1845-1918) aveva dimostrato nel 1878 che esiste una corrispondenza biunivoca fra l'intervallo [0,1] e il quadrato unitario. Ma l'anno successivo, Eugen Netto (1848-1919), professore a Berlino, dimostra che questa corrispondenza non può essere continua. Allora la curva di Peano non può essere iniettiva, altrimenti sarebbe biunivoca, in contraddizione con il teorema di Netto.
E la situazione oggi? La nozione non poteva essere ignorata da Cantor, che individua le curve piane in termini puramente topologici come gli insiemi del piano che sono *"chiusi, connessi e privi di punti interni"*. Questa nozione fa riferimento al piano a cui la curva appartiene ma verrà poi generalizzata e data in forma intrinseca dal giovane Pavel Uryson (1898-1924) all'inizio degli anni Venti del '900 attraverso la formalizzazione della nozione di dimensione topologica: a partire dalla dimensione dello spazio vuoto, che viene assunta uguale a *–1*, Uryson definisce per induzione la nozione di dimensione di tutti gli spazi metrici. In questo contesto gli insiemi finiti hanno dimensione 0 e le curve consuete della Matematica hanno dimensione 1, le superfici dimensione 2 e così via.
La curva di Peano con la sua preoccupante ambiguità dimensionale viene esclusa. Ma la sua rilevanza per i fondamenti della Matematica rimane.