Intersezioni e problemi enumerativi in geometria

Mirella Manaresi mirella.manaresi@unibo.it

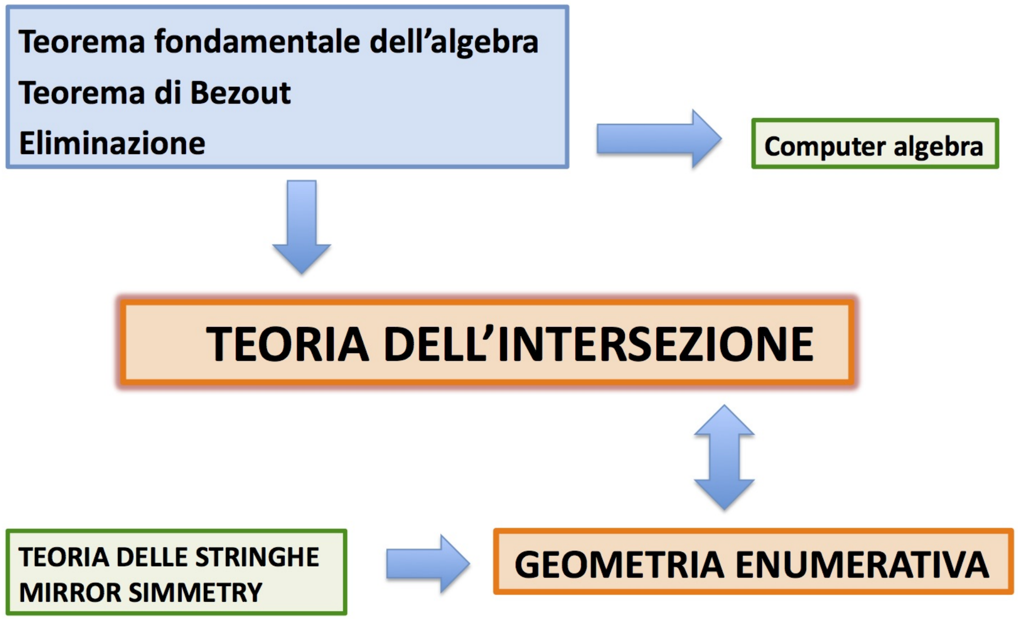
Convegno Pristem Bologna, 5 ottobre 2019

PAOLO SALMON (30 marzo 1930 - 25 settembre 2018):
DIDATTICA COLLEGATA ALLA RICERCA

Non si puó accettare una separazione netta e definitiva tra la ricerca avanzata, riservata agli specialisti, e una didattica dai contenuti limitati. La riflessione critica sulle teorie elevate deve portare ad uno sforzo continuo di ''elementarizzazione''' di tutti i contenuti di tali teorie.

La ricerca di esempi semplici ma significativi che consentano una pur parziale comprensione di proprietá profonde e riposte puó costituire al tempo stesso un punto di partenza per una didattica collegata alla ricerca avanzata . . .

I fondamenti della geometria, la geometria algebrica e l'algebra commutativa possono offrire un gran numero di spunti . . .


Teorema fondamentale dell'algebra
Teorema di Bezout
Eliminazione
Computer algebra
TEORIA DELL'INTERSEZIONE
TEORIA DELLE STRINGHE
MIRROR SIMMETRY
GEOMETRIA ENUMERATIVA

INTERSECARE DUE OGGETTI DATI

PUNTO DI VISTA INSIEMISTICO: considerare i punti comuni

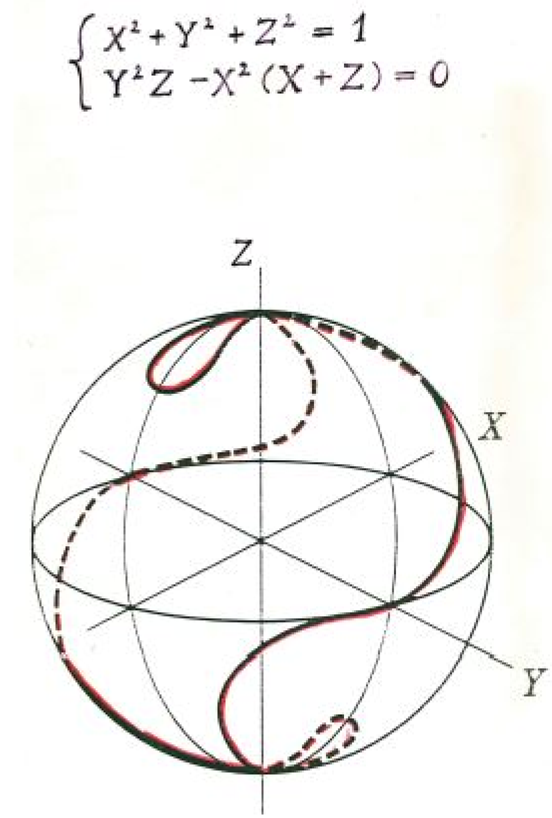
PUNTO DI VISTA GEOMETRICO-TOPOLOGICO: studiare la forma della parte comune

PUNTO DI VISTA ANALITICO: se i due oggetti sono definiti da equazioni, cercare le soluzioni comuni a tutte le equazioni che definiscono ciascuno dei due oggetti

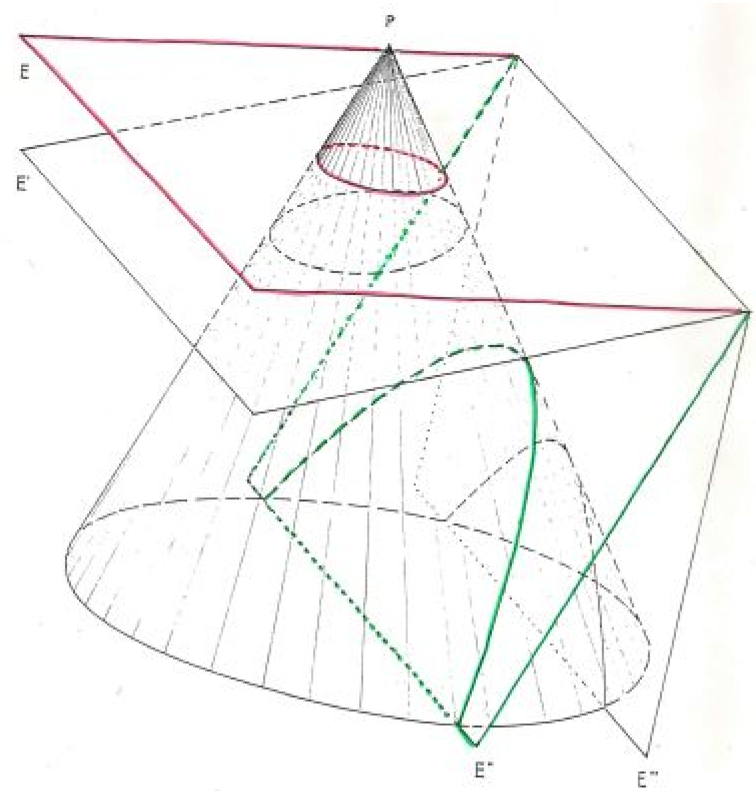
$$A : \begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ \cdots \\ f_r = 0 \end{cases} \qquad B : \begin{cases} g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \\ \cdots \\ g_s = 0 \end{cases} \qquad A \cap B : \begin{cases} f_1 = 0 \\ \cdots \\ f_r = 0 \\ g_1 = 0 \\ \cdots \\ g_s = 0 \end{cases}$$

ESEMPIO:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$
$$g(x, y, z) = y^2 z - x^2(x + z)$$

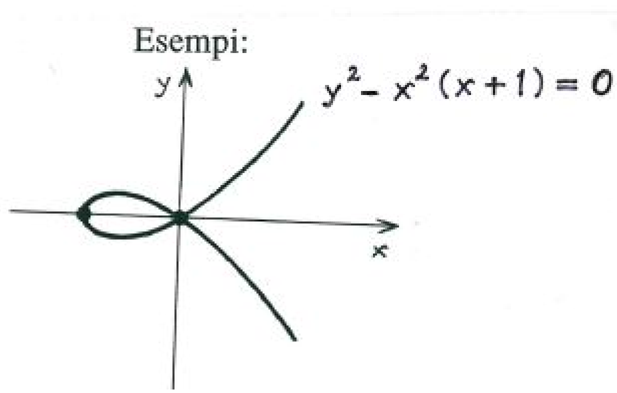


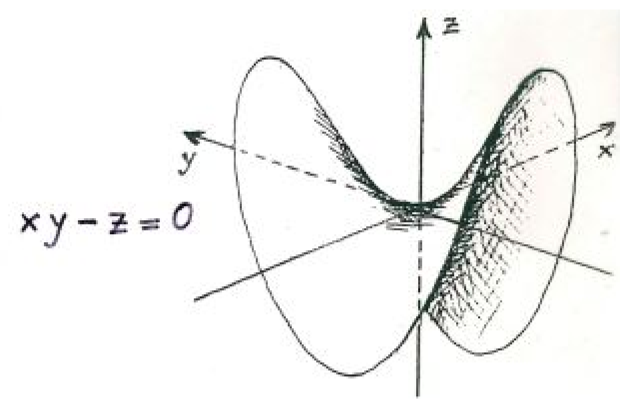
ESEMPIO:



Quando le equazioni sono date da polinomi gli oggetti si dicono **algebrici** (curve, superficie, varietá, ipersuperficie).

Ipersuperficie algebrica: oggetto definito da un solo polinomio (una sola equazione polinomiale) $\quad f = 0.$





La teoria dell'intersezione si interessa di cosa succede quando le varietá algebriche si intersecano in un qualche spazio ambiente.

Classicamente: l'AMBIENTE é lo **spazio proiettivo**, uno spazio in cui valgono le regole della prospettiva scoperte e utilizzate dagli artisti del rinascimento (nel caso del piano, non é altro che il piano ordinario completato con i cosidetti punti all'infinito, ossia con le direzioni delle rette).

Giá nel XVIII secolo Eulero e Bezout sapevano cosa succede per le curve piane.

Teorema fondamentale dell'algebra

1799 **Gauss** dimostra il seguente fatto:

Se $f(x)$ é un polinomio in una variabile reale, il numero delle radici di $f(x)$ é minore o uguale al grado di f.

Inoltre, se le radici (comprese quelle complesse) ''*si contano con la dovuta molteplicitá*'', il loro numero é esattamente uguale al grado di f.

Molteplicitá di una radice

$f(x) = x^3 - 2x^2$

$x^2(x-2) = 0$ se e solo se $x^2 = 0$ oppure $x-2 = 0$

$x = 0$ radice di **molteplicitá due**

$x = 2$ radice di **molteplicitá uno**

$3 =$ grado di $f = 2 + 1$

Trovare le radici del polinomio

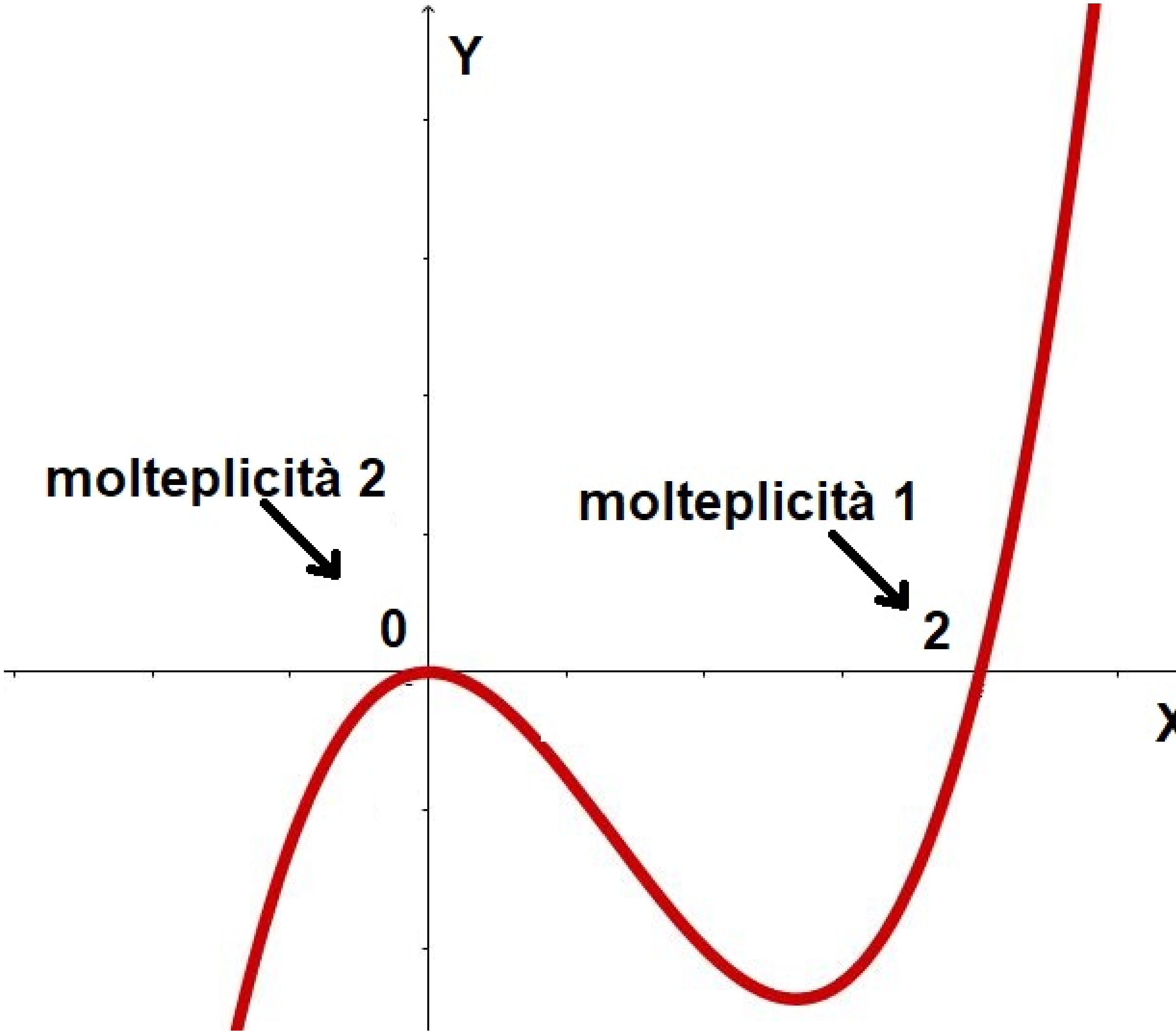
$$x^3 - 2x^2$$

equivale a trovare le intersezioni della curva

$$y = x^3 - 2x^2$$

con l'asse x di equazione

$$y = 0.$$



1779 BEZOUT: due curve piane di gradi m e n che non contengano una componente comune si intersecano sempre in mn punti.

Piú precisamente:

se C é la curva di equazione $f(x,y) = 0$, con f polinomio di grado n,
D é la curva di equazione $g(x,y) = 0$ con g polinomio di grado m
tali che $C \cap D$ sia un numero finito di punti $P_1, \cdots, P_r$, allora

$$r \leq mn,$$

inoltre se si considerano curve del piano proiettivo complesso (ottenuto estendendo il piano affine con i punti all'infinito) e si contano i punti di intersezione con le relative molteplicitá $m_1, \cdots, m_r$ risulta:

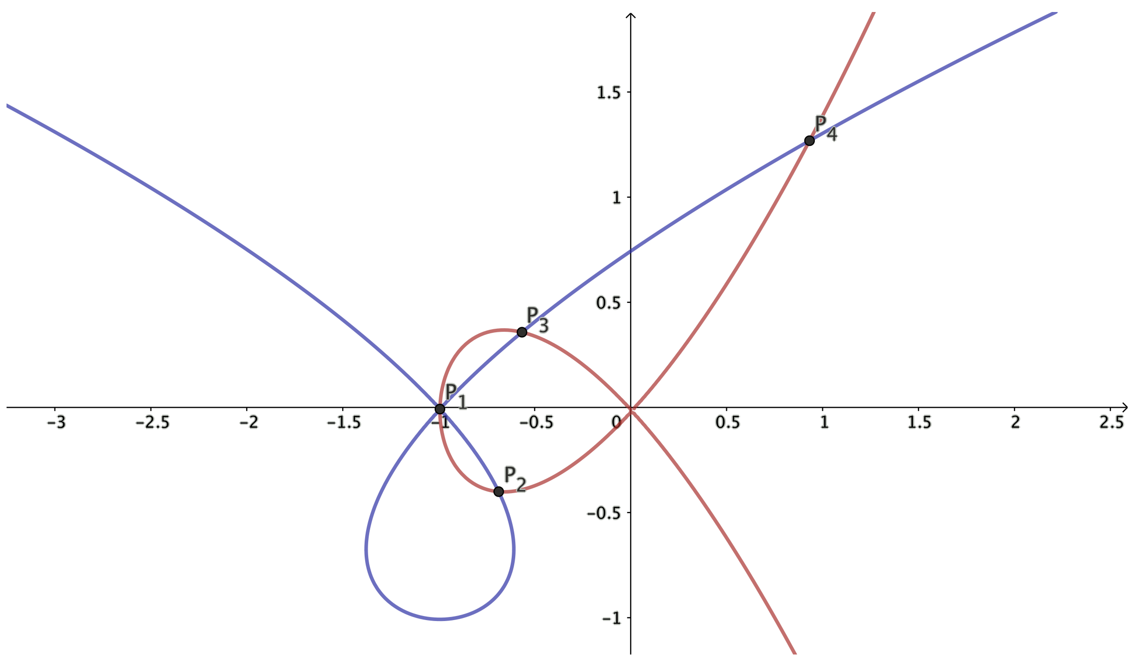
$$(grado\, f) \cdot (grado\, g) = m_1 + m_2 + \cdots + m_r.$$

ESEMPIO:

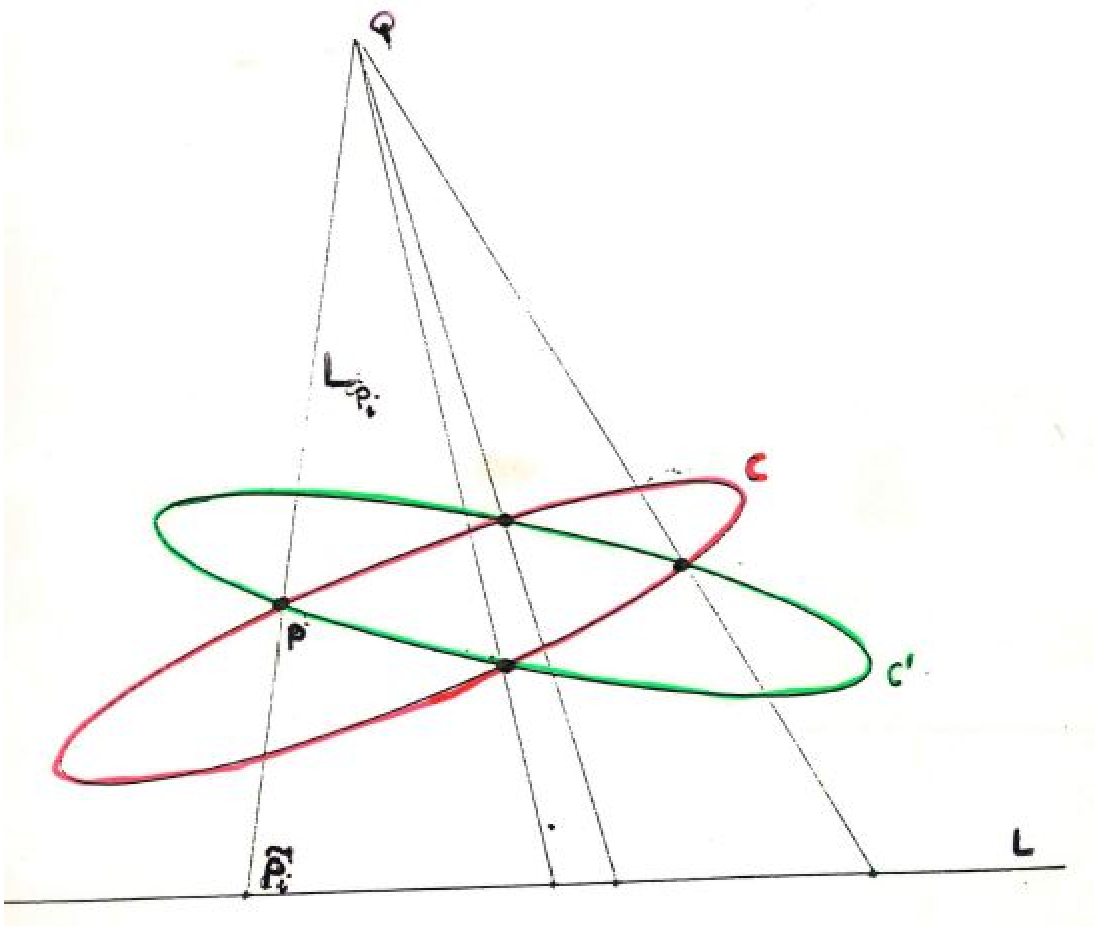
$$C: \quad y^2 = x^2(x+1)$$

$$D: \quad (x+1)^2 = y^2(y+1)$$

$$C \cap D = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$$

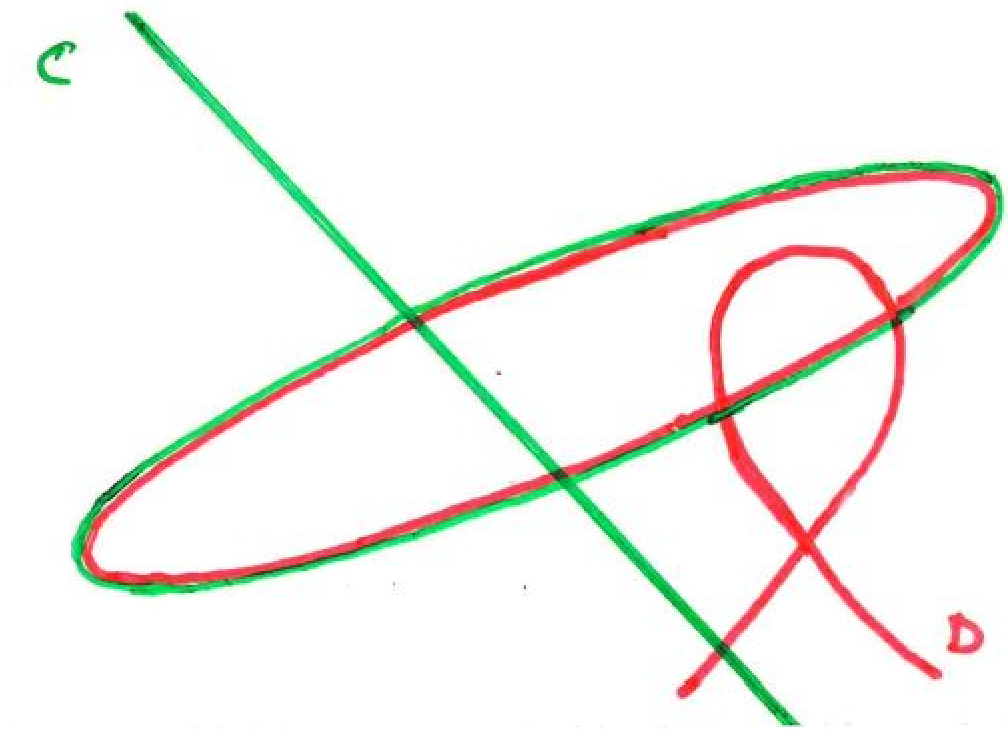


Per definire la molteplicitá di intersezione m_i Bezout introdusse un metodo per eliminare una delle variabili dalle due equazioni: questo metodo produce un polinomio in una sola variabile di grado mn.



Nel corso degli ultimi due secoli la teoria dell'intersezione ha avuto un enorme sviluppo. In particolare si é cercato:

i) di estendere il teorema di Bezout a tutte le curve piane, anche con componenti comuni, ossia che si intersecano in una curva anziché in punti.



Quando due varietá X e Y si incontrano in dimensione piú alta di quella prevista si dice che l'intersezione é IMPROPRIA o IN ECCESSO.

La **dimensione attesa** e'
$dim\,X + dim\,Y$ - dimensione dello spazio ambiente.

ESEMPI: due curve piane che hanno componenti comuni si incontrano in dimensione 1 e non in dimensione 0; una retta e un piano nello spazio si incontrano generalmente in un punto (dimensione 0), ma se la retta che giace sul piano si incontrano in dimensione 1.

ii) di estendere il teorema di Bezout a varietá X e Y di dimensione piú alta di 1.

In entrambi i casi i) e ii) si cercava una formula del tipo:

$$(grado\, X) \cdot (grado\, Y) = \sum_{C \subset X \cap Y} i(C) \cdot (grado\, C).$$

I problemi piú grossi erano:

a) definire una "buona" nozione di molteplicitá di intersezione $i(C)$;

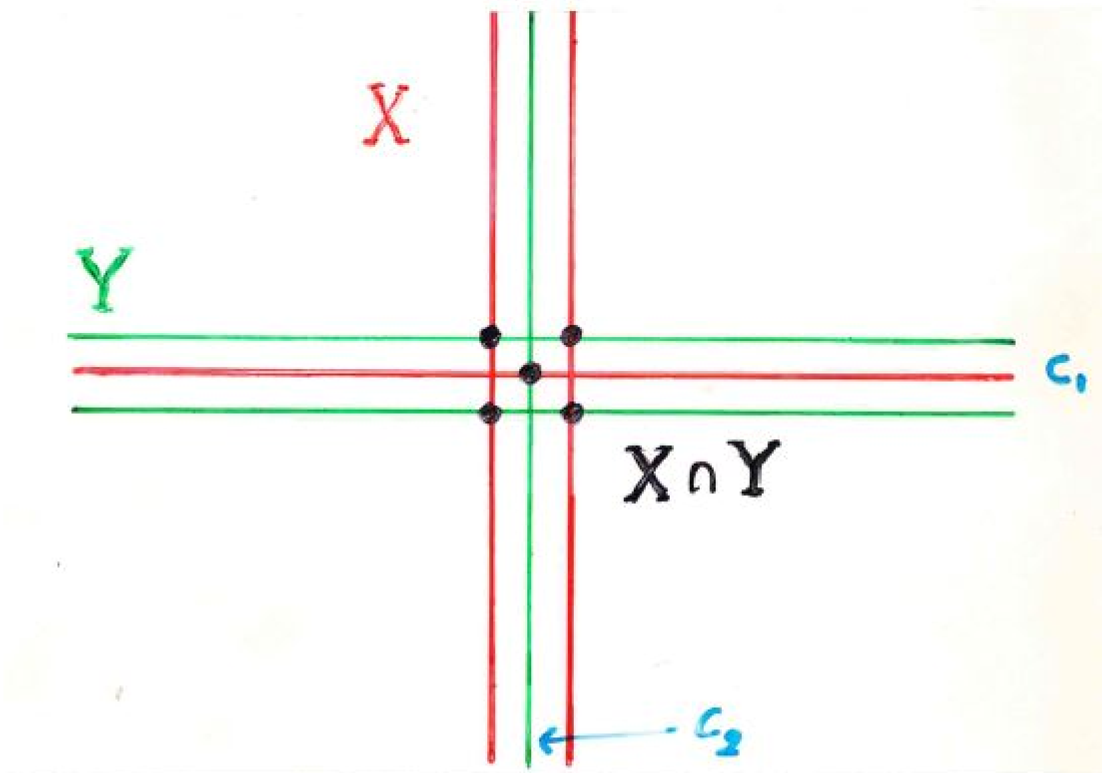
b) nel caso di intersezioni improprie, stabilire quali sottovarietá dell'intersezione debbono contribuire al *numero di Bezout*

$$(grado\, X) \cdot (grado\, Y).$$

ESEMPIO

X curva (rossa) definita da $x^2y = 0$

Y curva (verde) definita da $xy^2 = 0$



Insiemisticamente: $\quad X \cap Y = C_1 \cup C_2 \quad$ dove

$C_1 = \{(x,y) \mid x = 0\}$, poniamo $i_1 = i(C_1)$,

$C_2 = \{(x,y) \mid y = 0\}$, poniamo $i_2 = i(C_2)$,

ovviamente $i_1 = i_2 =: i$ perché la situazione é completamente simmetrica nelle due variabili x, y.

$9 = (grado\, X)(grado\, Y) = i_1(grado C_1) + i_2(grado C_2) = i_1 + i_2 = 2i.$

Questo é ASSURDO, perche' 9 dovrebbe essere un numero pari. In realtá si dimostra che in questo caso si deve anche considerare l'origine $(0,0)$ e contarla con molteplicitá 5.

$$9 = 2 + 2 + 5.$$

I contributi piú importanti al teorema di Bezout nel caso di intersezioni proprie sono venuti da illustri matematici:

1928 B.L. van der WAERDEN

1946 A. WEIL

1951 P. SAMUEL

1957 J.P. SERRE

Per le intersezioni improprie i risultati sono molto piú recenti:

1978 W. FULTON e R. MACPHERSON in uno spazio ambiente molto generale descrivono una famiglia di sottoinsiemi di $X \cap Y$ per i quali si puó definire una molteplicitá di intersezione $i(\ )$ in modo che valga

$$(grado\, X) \cdot (grado\, Y) \geq \sum_{C \subset X \cap Y} i(C) \cdot (grado\, C).$$

1982 J. STUECKRAD e W. VOGEL nel caso di varietá proiettive **attraverso un procedimento algoritmico** descrivono una famiglia di di sottoinsiemi di $X \cap Y$ per i quali si puó definire una molteplicitá di intersezione $i(\ )$ in modo che valga

$$(grado\, X) \cdot (grado\, Y) = \sum_{C \subset X \cap Y} i(C) \cdot (grado\, C).$$

1991 L. van GASTEL mostra il legame tra le due teorie.

Dopo questi risultati importanti rimanevano ancora molti PROBLEMI APERTI, per i quali negli ultimi trent'anni sono stati ottenuti vari risultati e sui quali ancora oggi si fa ricerca, per esempio:

i) stabilire quali singolaritá di X e Y danno contributo al "numero di Bezout",

ii) dare descrizioni di $i(\ )$ che ne permettano il calcolo con i sistemi di computer algebra attualmente disponibili.

.

Come si é visto, il teorema di Bezout é strettamente legato alla risoluzione dei sistemi di equazioni polinomiali, in quanto il risultato provato da Bezout puó anche essere formulato:

Se due polinomi in due variabili reali $f(x, y)$ e $g(x, y)$ non hanno infinite soluzioni comuni, allora il numero delle soluzioni comuni é minore o uguale al prodotto dei loro gradi.

In generale, risolvere un sistema di equazioni polinomiali non lineari

$$\begin{cases} f_1(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots \\ f_r(x_1, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$$

non é semplice.

Come nel caso dei polinomi lineari, si cerca di trasformare il sistema in un sistema equivalente, che sia piú facilmente risolubile.

In particolare, si cerca un'equazione conseguenza delle equazioni date, che coinvolga solo una variabile o il minor numero possibile di variabili (ELIMINAZIONE).

L'idea dell'eliminazione si puó far risalire a Newton (1680) e Leibniz (1693) e ad essa hanno contribuito illustri matematici, in particolare Gauss. Negli ultimi cinquant'anni sono stati fatti molti progressi dopo che nel

1965 B.Buchberger trova l'algoritmo per determinare le BASI DI GROEBNER (che erano giá state introdotte nel 1964 da Hironaka nel suo famoso lavoro sullo scioglimento delle singolaritá).

Questo algoritmo, che oggi sta alla base dei piú importanti sistemi di computer algebra, permette subito di stabilire se il sistema non ha soluzioni o se ha un numero finito di soluzioni (in questo caso nella base di Groebner compare un'equazione in una sola incognita).

I metodi di computer algebra sono anche estremamente utili nelle applicazioni (ad esempio nei problemi della robotica o dei codici autocorettori).

Tra i matematici che nel XIX secolo hanno contribuito all'enorme sviluppo della teoria dell'intersezione, molti (ad esempio Schubert e Zeuthen) avevano come principale interesse la GEOMETRIA ENUMERATIVA, che é quel ramo della geometria algebrica in cui si contano oggetti geometrici di un certo tipo, soggetti a restrizioni che rendono finito il loro numero.

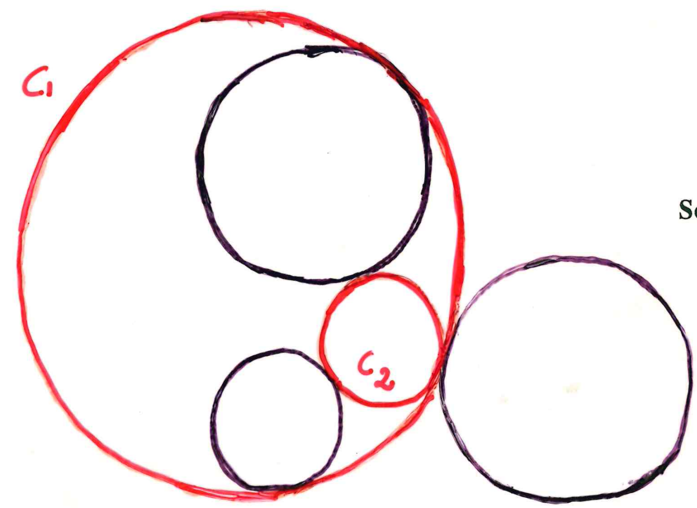
Molto spesso l'interesse del quesito non sta tanto nei numeri stessi, bensí nel metodo che produce le soluzioni e negli spazi dei parametri che si devono costruire per studiare il problema.

La nascita di questa disciplina risale ai matematici greci.

PROBLEMA DI APOLLONIO (circa 200 avanti Cristo): Quante sono le circonferenze che toccano (sono tangenti) a 3 circonferenze date? Come si possono costruire?

Sono 8 perché le circonferenze dipendono da 3 parametri e la condizione di tangenza ad un'altra circonferenza si esprime attraverso un polinomio di secondo grado.

In generale, quindi, vi sono otto circonferenze tangenti a tre circonferenze generiche, tenendo conto delle soluzioni complesse e di quelle degeneri.



Sono 8.

Quante sono le coniche tangenti a 5 rette $l_1, \cdots, l_5$ in posizione generica?

Una sola.

Il risultato é dovuto alla dualitá del piano proiettivo.

La condizione di genericitá delle rette si esprime dicendo che a 3 a 3 non debbono appartenere allo stesso fascio. Nella dualitá delo spazio proiettivo le rette di $\mathbb{P}^2$ corrispondono a punti dello spazio proiettivo duale $(\mathbb{P}^2)^*$ e le coniche di $\mathbb{P}^2$ corrispondono a coniche di $(\mathbb{P}^2)^*$. Le rette $l_1, \cdots, l_5$ in posizione generica corrispondono a punti $P_1, \cdots, P_5$ a tre a tre non allineati e per questi punti passa una e una sola conica.

Quante sono le coniche tangenti a 5 coniche $C_1, \cdots, C_5$ in posizione generica?

Il problema fu posto da Jacob Steiner nel 1848 come estensione del problema di Apollonio.

Steiner affermó: sono 7776.

Il ragionamento di Steiner era il seguente:

i) L'equazione di una conica C dipende da 5 parametri, in quanto é del tipo

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = 1.$$

Assegnare una conica significa assegnare i coefficienti di questa equazione, quindi le coniche del piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ costituiscono uno spazio proiettivo di dimensione 5, un $\mathbb{P}^5$ i cui punti sono (a, b, c, d, e).

ii) Le coniche tangenti a una conica data C_i sono gli zeri di un'equazione di grado 6

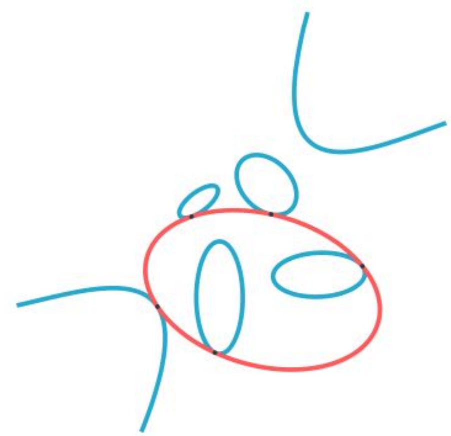
$$H_{C_i}(a, b, c, d, e) = 0.$$

iii) Le coniche tangenti alle 5 coniche date sono

$$H_{C_1} \cap H_{C_2} \cap H_{C_3} \cap H_{C_4} \cap H_{C_5},$$

quindi per il teorema di Bezout sono

$$6^5 = 7776.$$



1864 Luigi CREMONA: il ragionamento di Steiner é sbagliato.

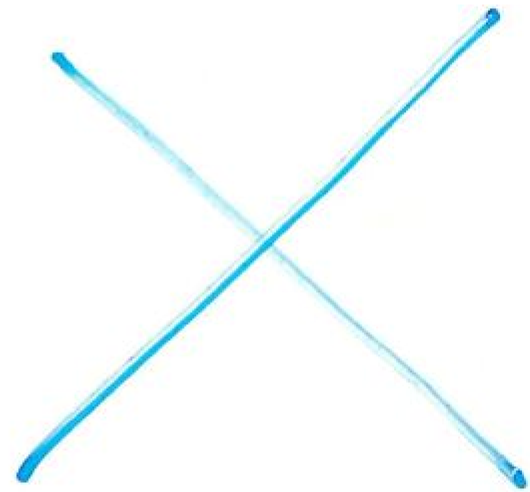
Il teorema di Bezout non si puó applicare, perche'

$$H_{C_1} \cap H_{C_2} \cap H_{C_3} \cap H_{C_4} \cap H_{C_5}$$

é infinito, in quanto contiene tutte le rette doppie. Infatti l'equazione

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = 1$$

rappresenta non solo le coniche "buone", ossia quelle non degeneri, ma anche quelle che sono unione di due rette e le rette doppie $(lx + my + n)^2 = 0$.



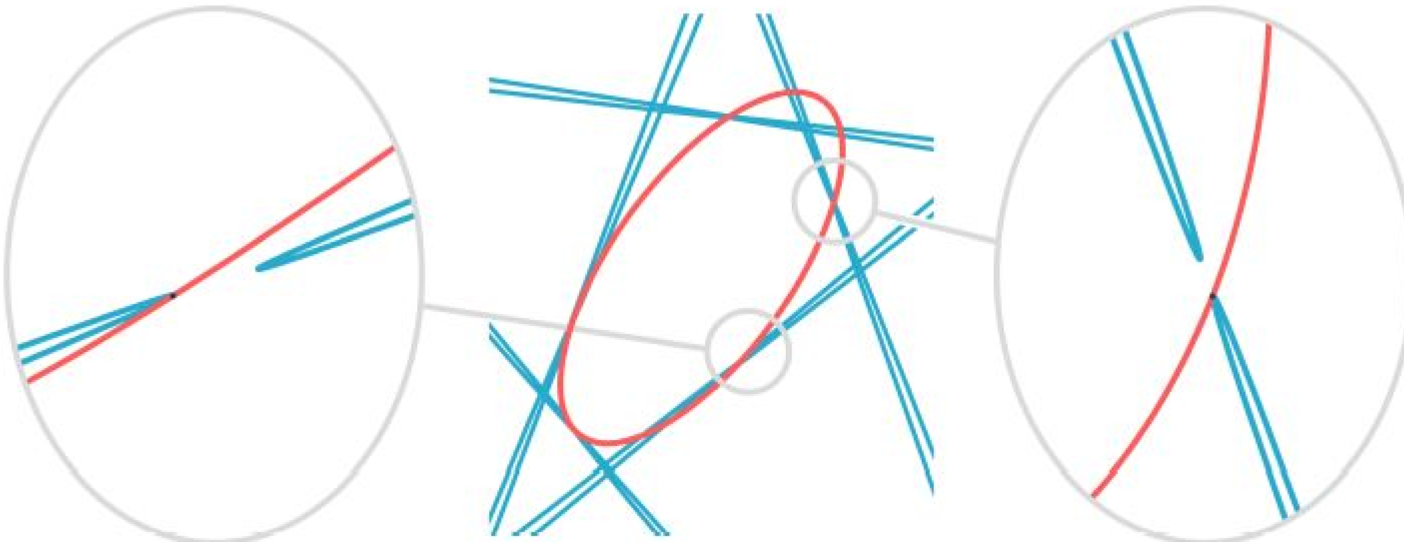
$$(lx + my + n)^2 = 0$$

$$H_{C_1} \cap H_{C_2} \cap H_{C_3} \cap H_{C_4} \cap H_{C_5} = \{rette\, doppie\} \cup \{altre\, coniche\}$$

{rette doppie} $= V$ superficie di Veronese (nel $\mathbb{P}^5$ di tutte le coniche), che é una superficie di grado 4.

{altre coniche} é finito?

Se il numero delle coniche che non sono rette doppie é finito, per calcolarlo occorre calcolare la molteplicitá con cui V appare nell'intersezione.



1866 CHASLES: se il numero é finito, allora é ≤ 3264.

(probabilmente l'idea di "come rimuovere" le rette doppie é dell'ufficiale della marina francese DE JONQUIERES, che riesce a intuire l'esatta risposta).

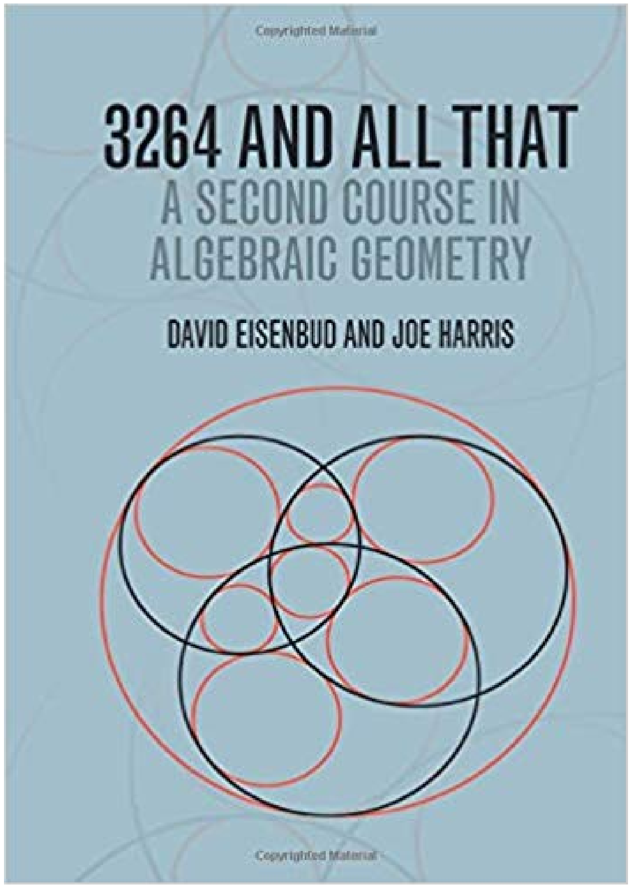
1879 Herman SCHUBERT: monografia sul calcolo enumerativo

1900 David HILBERT (XV problema): trovare una fondazione rigorosa del calcolo enumerativo di Schubert

1974 Steven KLEIMAN: il numero é 3264 e le coniche sono tutte distinte e non degeneri.

$$7776 = 1128 \times (grado\, V) + 3264 = 1128 \times 4 + 3264.$$

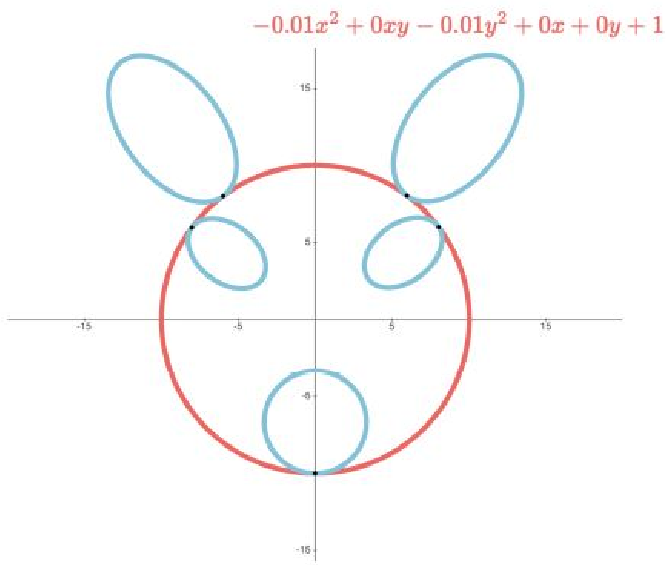
David Eisenbud - Joe Harris 2016



2019: P.BREIDING - B.STURMFELS - S.TIMME:
3264 Conics in a Second

Viene presentata un'interfaccia web per calcolare le 3264 coniche, date le 5 coniche. Viene utilizzato il software HomotopyContinuation.jl, e vengono discussi i casi in cui tutte le 3264 soluzioni sono reali.

www.juliahomotopycontinuation.org/3264/



Negli ultimi 30 anni la geometria enumerativa ha avuto un nuovo impulso grazie alle teorie elaborate dai fisici teorici, in particolare da Edward WITTEN e collaboratori.

Nella **TEORIA DELLE STRINGHE**, elaborata dai fisici a partire dal 1980 e tuttora in fase di sviluppo

$$M^{10} = M^{1,3} \times M^{6}$$

con

$M^{1,3}$ usuale spazio tempo

M^{6} threefold di Calabi-Yau, ossia una varietá complessa compatta di dimensione 3 (dimensione reale 6) con fibrato canonico banale.

Witten ha scoperto che vi sono coppie di varietá di Calabi-Yau che danno teorie fisiche isomorfe; tra queste varietá c'e' un legame, una dualitá chiamata MIRROR SYMMETRY.
Questo legame, che per i matematici é ancora molto misterioso, ha indotto i fisici a congetturare che, se X e Y sono due Mirror Patners, c'e' uguaglianza tra certi invarianti di X e certi invarianti di Y di natura completamente diversa. Piú precisamente sono uguali:

a) i numeri delle curve razionali di vari gradi su X,

b) gli integrali dei periodi di certe forme olomorfe su Y.

Gli integrali dei periodi in molti casi sono piú facili da calcolare rispetto ai numeri delle curve razionali, che in generale non si sa neppure se siano finiti.

CONGETTURA (H.Clemens, 1983): sul threefold quintico ci sono solo un numero finito di curve razionali per ogni grado.

WITTEN e altri, utilizzando la Mirror Symmetry hanno CONGETTURATO i numeri delle curve razionali dei vari gradi sul 3-fold quintico generale.

Questo ha dato origine a un frenetico lavoro ricerca riguardante il calcolo di curve razionali per dare una formulazione matematica rigorosa delle teorie fisiche.

Nei casi in cui i matematci sono riusciti a calcolare i numeri delle curve, questi sono risultati esattamente quelli congetturati dai fisici.

Sul 3-**fold quintico generale** ci sono:

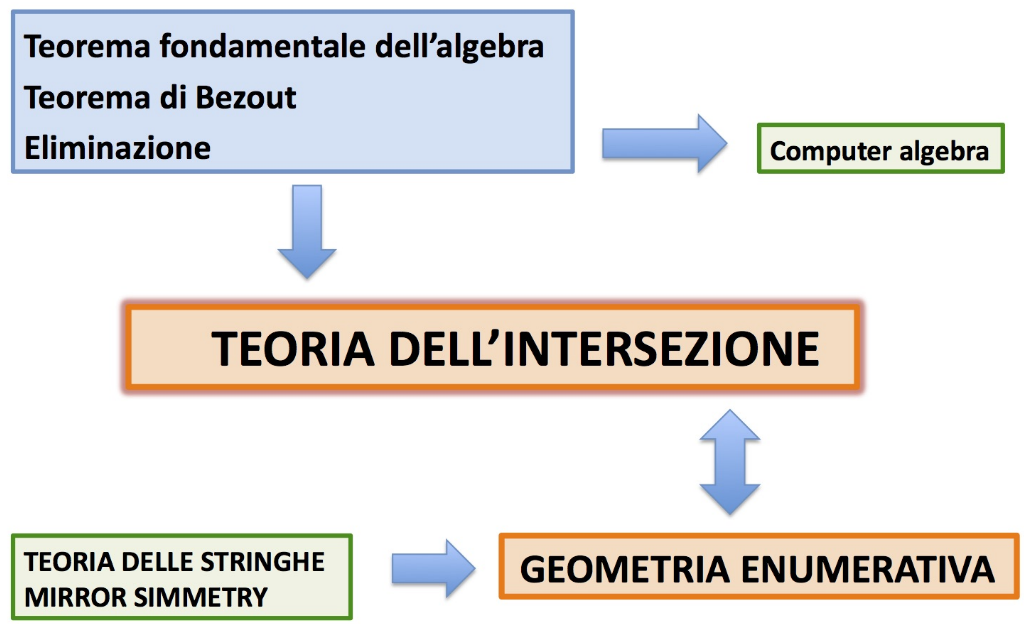
$2875 = 5 \times 375 + 20 \times 50$ rette S.KATZ (1988)

609.250 coniche S.KATZ (1988)

317.206.375 cubiche ELLINGSRUD-STROMME (1993)

242.467.530.000 quartiche razionali KONTSEVICH (1995)

Grazie ai contributi di molti matematici i numeri sono stati calcolati tutti fino al grado 9 (e quasi tutti fino al grado 24).


Teorema fondamentale dell'algebra
Teorema di Bezout
Eliminazione
Computer algebra
TEORIA DELL'INTERSEZIONE
TEORIA DELLE STRINGHE
MIRROR SIMMETRY
GEOMETRIA ENUMERATIVA