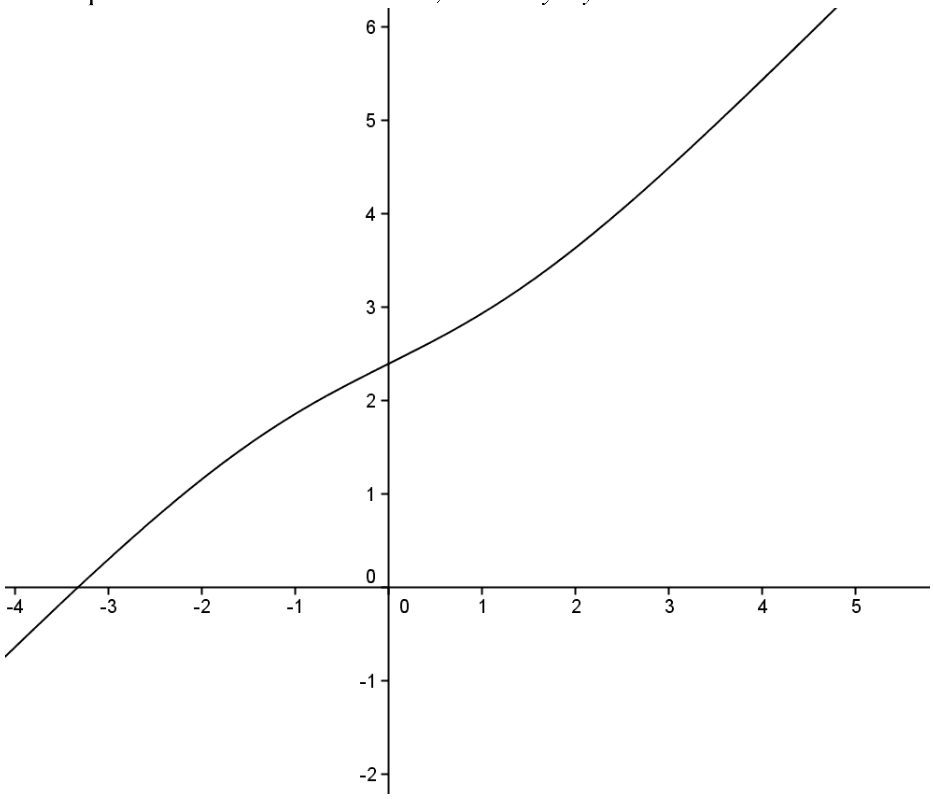
# Problema 1 PNI

1. Per $x \to +\infty$ la funzione $f(x)$ si comporta come la retta $y = x + \ln 4$ (asintoto obliquo) e pertanto il suo limite è $+\infty$. Per $x \to -\infty$ la funzione si comporta come la retta di equazione $y = x + 2 + \ln 4$ e pertanto il suo limite è $-\infty$.
   Risulta $f(x) + f(-x) = x + \ln 4 + 2/(e^x + 1) - x + \ln 4 + 2e^x/(e^x + 1) = 2 + 2\ln 4$.
   Dalle equazioni della simmetria centrale, si ricava $y + y' = 2b$ da cui $b = 1 + \ln 4$




2. L'equazione $f(x) = m$ ammette sempre un'unica soluzione in quanto il codominio della funzione $f$ è tutto l'asse reale e $f$ è strettamente crescente come si deduce dal segno della sua derivata prima $f'(x) = (e^{2x} + 1)/(e^x + 1)^2$ sempre positiva.
   Se risulta $f(a) = 3$, abbiamo $f(-a) = 2 + 2\ln 4 - f(a) = 2\ln 4 - 1$.

3. La verifica che $f(x)$ può scriversi anche in questa forma (equivalente) è immediata.
   Degli asintoti obliqui si è già detto.
   La verifica che il grafico della funzione sta sempre al di sopra della retta $r$ discende dal fatto che $x + \ln 4 + 2/(e^x + 1)$ è sempre maggiore di $x + \ln 4$. Analogamente si ragiona per la retta $s$ (il grafico di $f$ sta sempre al di sotto di quello di tale retta).

4. La funzione integranda è uguale a $2 - 2e^x/(e^x + 1)$. Quindi l'integrale proposto è uguale a $2b - \int_0^{e^b} 2/(t + 1)\, dt$ (avendo posto $e^x = t) = 2b - 2\ln(1 + e^b) + 2\ln 2$. Il suo limite, per $b \to +\infty$, $= 2\ln 2$, esprime l'area della superficie compresa tra il grafico della funzione e quello della retta $r$ per $x > 0$