Questionario ordinamento

1. Sia $2x$ l'altezza del cilindro di massimo volume inscritto nella sfera data. Se r è il raggio della circonferenza di base di tale cilindro, allora risulta:
$$r^2 = R^2 - x^2$$
dove R è il raggio della sfera. Il volume del cilindro è $V = \pi(R^2 - x^2)\cdot 2x = 2\pi(R^2 x - x^3)$. Derivando rispetto a x, si calcola il valore di minimo $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$. Sostituendo il valore trovato, si ottiene $V = \frac{2R}{\sqrt{3}}\pi(R^2 - \frac{R^2}{3})$. Ora, ponendo $R = 6\,dm$, si ottiene $V = 96\sqrt{3}\pi$. La capacità in litri è circa 522,37 litri.

2. Sia $P(x, \sqrt{x})$ un generico punto della curva in oggetto. La sua distanza da (4;0) è data da $d = \sqrt{(x-4)^2 + x} = \sqrt{x^2 - 7x + 16}$. Calcolandone la derivata prima, si vede che tale distanza è minima per $x = 7/2$.

3. $V = \pi\int_0^8 (2)^2\, dy - \pi\int_0^8 \sqrt[3]{y^2}\, dy = \frac{64\pi}{5}$

4. Le informazioni del testo portano all'equazione $\binom{n}{4} = \binom{n}{3}$ ovvero a:
$$\frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} \quad \text{da cui} \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \text{ da cui } \frac{n-3}{4} = 1 \text{ che dà la soluzione } n = 7$$

5. L'area richiesta è data da:
$\int_1^{\pi/2} \cos x\, dx - \int_{\pi/2}^2 \cos x\, dx = [\sin x]_1^{\pi/2} - [\sin x]_{\pi/2}^2 = 1 - \sin 1 - \sin 2 + 1 = 2 - \sin 1 - \sin 2$

6. $$\lim_{x\to a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{1 + \tan^2 x}{1} = 1 + \tan^2 a$$

7. $f(-1) = -1 - 2011 + 12 = -2000$; $f(0) = 12$. Essendo la funzione continua nell'intervallo $[-1; 0]$, per il teorema degli zeri esiste almeno un punto $c \in (-1; 0)$ tale per cui $f(c) = 0$. Tale punto è unico in quanto la funzione è strettamente crescente come si deduce dal segno della sua derivata prima $f'(x) = 2011 \cdot (x^{2010} + 1)$ che è sempre positiva

8. Il problema della quadratura del cerchio è quello di costruire con riga e compasso un quadrato equivalente ad un cerchio dato. Ciò implica costruire con riga e compasso un segmento di misura $\sqrt{\pi}$. L'importanza del problema consiste nel capire i limiti delle costruzioni con riga e compasso e la sua diffusione è dovuta ai suoi numerosi insuccessi (finché è stato dimostrato che è impossibile, in quanto π è un numero trascendente).

9. Il luogo dei punti equidistanti dai vertici B e C dell'ipotenusa è il piano assiale del segmento BC.
Analogamente, il luogo dei punti equidistanti dai vertici A C di un cateto è il piano assiale del segmento AC. L'intersezione di questi due piani è il luogo dei punti equidistanti dai tre vertici che, nel caso di un triangolo rettangolo, passa per il punto medio dell'ipotenusa ed è perpendicolare al piano del triangolo.

10. L'alternativa A) è impossibile in quanto la funzione f è sempre crescente mentre la curva II è anche negativa.
Per la stessa ragione è falsa anche l'alternativa B).
L'ipotesi C) è impossibile perché f è decrescente per $x < 0$ mentre per alcuni di tali valori il diagramma della funzione III si trova al di sopra dell'asse x.
L'ipotesi E) è falsa perché per $x < 0$ la funzione III è in parte crescente e in parte decrescente mentre per tali valori la funzione I non è mai positiva.
Così ragionando, si verifica che l'unica alternativa possibile è quella rappresentata da D).